UnADM
UNIVERSIDAD ABIERTA Y A DISTANCIA DE MÉXICO

Programa de la asignatura:

Ecuaciones diferenciales

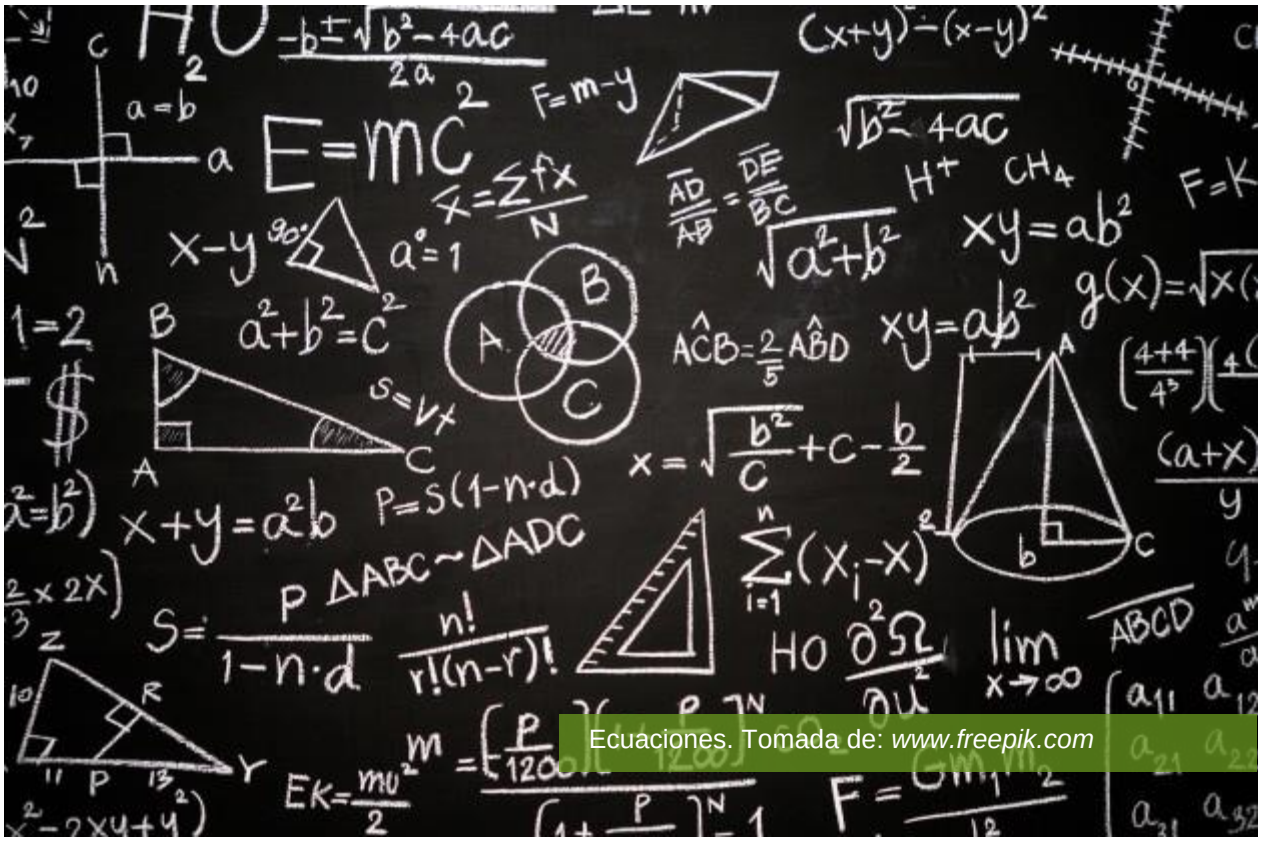
U3

Transformada de Laplace y series de Fourier

DCSBA

TECNOLOGÍA AMBIENTAL

Unidad 3. Transformada de Laplace y series de Fourier



Ecuaciones. Tomada de: *www.freepik.com*

Índice

Presentación de la Unidad 4
Propósitos de la unidad 5
Competencia específica 6
Actividades 6
3.1. Transformada de Laplace 7
3.1.1. Definición de transformada de Laplace 7
3.1.2. Definición de la transformada inversa 9
3.1.3. Linealidad y otras propiedades 14
3.1.4. Condiciones suficientes de existencia para la transformada de Laplace 18
3.1.5. Transformada de Laplace de funciones básicas 20
3.1.6. Transformada de Laplace de funciones definidas por tramos 27
3.1.7. Cálculo de la transformada inversa para funciones 31
3.1.8. Derivación de la transformada 35
3.1.9. Integración de la transformada 37
3.1.10. Aplicaciones de la transformada de Laplace en fenómenos físicos 40
3.2. Series de Fourier 43
3.2.1. Definición de las series de Fourier 45
3.2.2. Series trigonométricas y funciones con periodicidad 48
3.2.3. Fórmulas de Euler 55
3.2.4. Convergencia de series 61
3.2.5. Funciones no periódicas en series 70
3.2.6. Aplicaciones de las series de Fourier en fenómenos físicos 76
Cierre de la Unidad 81
Fuentes de consulta 82

Presentación de la Unidad

En esta tercera unidad serán cubiertos conceptos que se utilizarán para modelar y resolver matemáticamente de una forma adecuada problemas existentes en fenómenos físicos que encuentran relación con las ecuaciones diferenciales. Para ello, se tratarán los temas de la transformada de Laplace y las series de Fourier definiendo ambas, aprendiendo a calcular la transformada inversa, facilitando el reconocer las propiedades de linealidad y traslación, identificando las condiciones suficientes de existencia para la aplicación de éstas, y aprendiendo a calcular la transformada y series para funciones básicas y definidas por tramos. Serán mostrados los fundamentos que permiten hacer uso de estas dos herramientas matemáticas, detallando las fórmulas de Euler, la forma de las series trigonométricas y funciones con periodicidad, así como el tratamiento de aquellas funciones no periódicas por medio de series. Se estudiarán casos particulares y la aplicación de la transformada de Laplace y series de Fourier para resolver problemas asociados con fenómenos físicos presentes en las energías renovables.

El objetivo de esta y de las demás unidades es proporcionar las herramientas necesarias para modelar matemáticamente sistemas cambiantes en el tiempo, facilitando su aplicación en el desarrollo, análisis, operación y control de sistemas de energía renovable.

Bienvenido(a) a esta tercera y última unidad del curso.

Propósitos de la unidad

El propósito de la unidad es comprender la transformada de Laplace, sus propiedades, sus condiciones, y utilizarla de forma correcta sobre ecuaciones y funciones, facilitando su cálculo. Una vez que hayas mecanizado las habilidades para solucionar problemas haciendo uso de la transformada de Laplace, el propósito es que la apliques para resolver modelos similares que encuentres en sistemas de energías renovables.

Por otro lado, esta unidad tiene como propósito permitirte identificar las series de Fourier y su aplicación en el tratamiento de problemas que puedan involucrarlas dentro de fenómenos físicos.

Competencia específica

Aplica ecuaciones diferenciales para solucionar matemáticamente problemas que involucran fenómenos físicos encontrados en sistemas de energías renovables, utilizando la transformada de Laplace y series de Fourier.

Actividades

Las instrucciones de las actividades de aprendizaje, las podrás consultar en el espacio de *Planeación del docente en línea*, toma en cuenta que para estas unidades se han generado actividades colaborativas, individuales, complementarias, autorreflexiones y la evidencia de aprendizaje.

3.1. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es un recurso matemático que será de gran utilidad dentro del cálculo de ecuaciones diferenciales asociadas con fenómenos físicos, ya que permitirá cambiar problemas de cálculo por problemas aritméticos, facilitando su resolución y permitiendo interpretar su realidad desde otro marco de referencia.

3.1.1. Definición de transformada de Laplace

La transformada de Laplace, de acuerdo a Zill (1997), se establece como

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

donde $f(t)$ es función definida en todo t mayor o igual a cero.

Para distinguir una función previa a ser transformada de una que ya lo ha sido, algunos autores en sus libros hacen uso de letras minúsculas al escribirlas, y una vez ya transformada de mayúsculas.

$$L\{y(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} y(t)dt = Y(s)$$

$$L\{p(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} p(t)dt = P(s)$$

$$L\{g(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt = G(s)$$

Un ejemplo muy básico de ello sería el querer obtener la transformada de Laplace para una función representada por un número constante. Se propone

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

En este caso, $f(t) = 1$.

$$L\{1\} = \int_0^{\infty}(e^{-st})(1)dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b}(e^{-st})(1)dt = \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-st}}{s}\Big|_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-sb}-(-e^{(-s)(0)})}{s} = \frac{-e^{-s\infty}+e^{0}}{s}$$

Como $-e^{-s\infty}\to 0$ y $e^{0}=1$ (recuerda que por definición $e^{-\infty}=0$),

$$\frac{-e^{-s\infty}+e^{0}}{s} = \frac{0+1}{s} = \frac{1}{s}$$

Entonces
$L\{1\} = \frac{1}{s}$

para $s>0$.

Ésta última condición se debe a que si $s<0$ el exponente de e, $-st$, será positivo, y si t tiende a infinito en el límite, e^{∞} hace que la integral no exista, a lo que se le nombra como *divergencia*. En otras palabras, cuando el límite no existe, tampoco lo hace la integral.
Caso contrario, si el límite existe hay *convergencia* en la integral, que es otra forma de decir que existe.

Como ha sido mostrado, cuando la integral tiene convergencia, resulta de esta una función de s, esto es, $F(s)$.

Para ver más cálculos de la transformada de Laplace para funciones básicas **consulta** el subtema 3.1.5. Transformada de Laplace de funciones básicas de esta unidad 3.

Se ha visto que la transformada de Laplace permite cambiar una función en otra para facilitar y aplicar las operaciones necesarias en su resolución, pero al final lo que se tiene es el resultado en unidades diferentes, lo que aún dejaría sin tener la solución del problema original. Se debe entonces encontrar la manera de regresar a las formas previas a la transformación para poder dar respuesta a las preguntas inicialmente planteadas en los problemas, sin dejar soluciones inconclusas.

3.1.2. Definición de la transformada inversa

Para resolver el planteamiento final del subtema anterior, en donde, se estableció la necesidad de regresar, una vez aplicada la transformada de Laplace, a las variables iniciales del problema en un afán de no dejar la solución inconclusa, se tratará de completar el algoritmo de resolución.

Para resolver problemas haciendo uso de la transformada, lo que sea inferido que se puede hacer hasta el momento es:

1 Modelar por medio de ecuaciones los problemas presentados,
2 Calcular la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación resultante, y
3 Despejar la transformada de Laplace de la función correspondiente a la incógnita del problema original.

Atendiendo a la necesidad de solucionar la incógnita original, el último paso de nuestro algoritmo deberá ser:

4 Buscar una función que resulte en la transformada de Laplace despejada.

En este último paso lo que se hará será aplicar aquello a lo que se le conoce como *transformada inversa*.

La **transformada inversa de Laplace** se escribe como L^{-1}, lo que significa que

$$\mathrm{L}^{-1}\{\mathrm{F}(s)\} = \mathrm{f}(t)$$

siempre y cuando

$$\mathrm{L}\{\mathrm{f}(t)\} = \mathrm{F}(s)$$

Observa un ejemplo de cómo se aplicaría la transformada inversa de Laplace.

Supón que se tiene una función en el dominio de s

$$\mathrm{F}(s) = \frac{1}{s}$$

Entonces

$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\{\frac{1}{s}\}$$

Para resolverla se puede realizar todo el proceso de manera invertida al llevado a cabo en el subtema 3.1.1. Definición de transformada de Laplace, completando la equidad para agregar los términos que se sabe que tiene la definición de la transformada de Laplace,

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

para al final tener una expresión similar a

$$\lim_{b\to\infty} \frac{-e^{-st}}{s}|_0^b$$

que se podría entonces convertir a

$$\int_0^{\infty} e^{-st}dt$$

Al ver la expresión, se podría inferir que si se tiene

$$\int_0^{\infty} e^{-st}dt$$

y como la transformada de Laplace, por definición, se expresa como

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

entonces se tiene ya completa, para un $f(t) = 1$. Se habrá encontrado la transformada inversa de Laplace para $\frac{1}{s}$.

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) \rightarrow L^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1$$

Puedes observar que se requiere mucha habilidad y práctica para poder encontrar transformadas inversas por medio de ir completando las expresiones provistas hasta llegar a la que se necesita. Es por eso que se basará, para facilitar su correcta aplicación, en transformadas de Laplace que se calculará en temas posteriores y otras ya calculadas,

para poder encontrar rápidamente la transformada inversa al reescribir las expresiones dadas como otras ya conocidas haciendo uso de distintas propiedades que verás en los temas 3.1.3 y 3.1.5 de esta unidad.

Un ejemplo de a qué se refiere:

Como en el tema 3.1.1 se encuentra que la transformada de Laplace de
$f(t) = 1$

queda calculada como
$L\{1\} = \frac{1}{s}$

Entonces se sabe que la transformada inversa de Laplace para

$F(s) = \frac{1}{s}$
es
$L^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1$

Para poder facilitar llegara una expresión conocida como transformada de una función, se recomienda convertir primero el denominador a una forma reconocida y posteriormente el numerador. Algunas formas de manipular denominadores pueden ser, entre otras, el método de completar la expresión cuadrática y el método de fracciones parciales.

Bronson, R., (2003, p. 58-59) presenta esos dos métodos de la siguiente manera:

Método 1

Si se tiene una expresión cuadrática polinomial $as^2 + bs + c$, para convertirla en una suma de cuadrados (dado que la tabla de transformadas provista en temas posteriores contiene muchas de ellas con denominadores de esa forma) se haría lo siguiente,

$$as^2 + bs + c = a\left(s^2 + \frac{b}{a}s\right) + c = a\left(s^2 + \frac{b}{a}s\right) + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c =$$

$$a\left(s^2 + \frac{b}{a}s\right) + \frac{a\,b^2}{a\,4a} - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(s^2 + \frac{b}{a}s\right) + a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a} + c =$$

$$a((s^2+\frac{b}{a}s)+\frac{b^2}{4a^2})+c-\frac{b^2}{4a}=a(s^2+\frac{b}{a}s+(\frac{b}{2a})^2)+(c-\frac{b^2}{4a})=$$

$$a(s+\frac{b}{2a})^2+(c-\frac{b^2}{4a})=a(s+k)^2+h^2$$

en donde
$k=\frac{b}{2a}$ y $h^2=c-\frac{b^2}{4a}$, por lo que $h=\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}$

Método 2

Si se tiene una expresión de la forma $\frac{a(s)}{b(s)}$ en donde tanto a como b son polinomios, el método de las fracciones parciales la convierte en la suma de otras fracciones en donde el denominador de cada nueva fracción es uno de primer grado o cuadrático elevado a alguna potencia. Para poder utilizarlo se requiere que el grado de a sea menor al de b, y que b sea factorizable en el producto de polinomios lineales y cuadráticos elevados a varias potencias.

El método dice que para cada factor de b del tipo $(s-a)^m$ debe de asignarse una suma de m fracciones de la forma

$$\frac{A_1}{s-a}+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\frac{A_3}{(s-a)^3}+\cdots+\frac{A_m}{(s-a)^m}$$

Para cada factor de b del tipo $(s^2+bs+c)^n$ debe de asignarse una suma de n fracciones de la forma

$$\frac{B_1s+C_1}{s^2+bs+c}+\frac{B_2s+C_2}{(s^2+bs+c)^2}+\frac{B_3s+C_3}{(s^2+bs+c)^3}+\cdots+\frac{B_ns+C_n}{(s^2+bs+c)^n}$$

Las constantes A_i, B_j y C_k (donde $i=1,2,3,\ldots,m$ y $j,k=1,2,3,\ldots,n$) se sacarán de la siguiente manera. Se deberá igualar la fracción original, $\frac{a(s)}{b(s)}$, a la suma de las nuevas fracciones construidas, resolviendo el sistema de ecuaciones lineales para despejar todas las A, B y C.

Reproduce el siguiente video para ver un ejemplo de cómo usar este segundo método:

http://www.youtube.com/watch?v=19ErKVbteX0 y que también pueden encontrar en los materiales con el nombre “Descomposición en fracciones parciales*.mp4*”

Más adelante, en los temas 3.1.7 y 3.1.10 de esta unidad, se presentará su aplicación en los cálculos de la transformada.

Para manipular el numerador se hace uso de simple álgebra. Por ejemplo, si se tiene en el numerador una expresión del tipo $s-a$ podría ser reescrita como $(s-b)+(b-a)$, y si se tuviera una constante a en el numerador que requiriera completarse se podría multiplicar todo por la unidad creada por $\frac{b}{b}$, para tener un resultante de la forma $a=\frac{a}{b}b$.

Estas formas de trabajar con el numerador y denominador, aunque pudieran parecer obvias, tendrán mucha relevancia al unirse a las propiedades de la transformada y transformada inversa de Laplace, como lo es la linealidad. Esta y otras propiedades se cubrirían en el siguiente subtema, 3.1.3. L*inealidad y otras propiedades*.

Como una pequeña introducción al tema 3.1.3, y a manera de cierre de éste 3.1.2 en que se ha tratado a la transformada inversa, una vez que la has determinado posiblemente te preguntes cómo saber que se ha seleccionado a la función correcta para regresar, en el paso 4 de nuestro algoritmo, a la solución de nuestra incógnita original. Blanchard, P., Devaney, R. L. y Hall, G. R. (1999, p.505-506) hablan de una propiedad de la transformada inversa llamada *unicidad*. Esta propiedad dice que si $f(t)$ es función continua con transformada de Laplace $L\{f(t)\}=F(s)$, $f(t)$ será la única función (de ahí lo de “unicidad”) que tendrá por transformada $L\{f(t)\}$ a $F(s)$. Por eso se dice “la transformada inversa de $F(s)$” en lugar de “una transformada inversa de $F(s)$”, ya que será la única.

Para ver más cálculos de la transformada inversa de Laplace para funciones básicas puedes consultar el subtema 3.1.7 de esta unidad 3.

3.1.3. Linealidad y otras propiedades

La linealidad es una propiedad que se encuentra presente en operaciones como la integración (tanto definida como indefinida) y diferenciación, significando que, mientras existan cada derivada e integral, para cualquier constante α y β lo siguiente se cumple (Zill, 1997):

$$\frac{d}{dx}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \frac{d}{dx} f(x) + \beta \frac{d}{dx} g(x)$$

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Al estar definida la transformada de Laplace como una integral

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

la propiedad de linealidad es inherente a ella.
Esto significa que

$$L\{f(t) + g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \int_0^\infty e^{-st}\alpha f(t)dt + \int_0^\infty e^{-st}\beta g(t)dt$$
$$= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$$

si convergen (existen) ambas integrales resultantes.

Expresado de otra forma, la linealidad de la transformada de Laplace dice que

$$L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha L\{f(t)\} + \beta L\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta F(s)$$

Al ser la transformada inversa, vista en el tema 3.1.2, resultado de las mismas operaciones, pero revertidas, también es un operador lineal.

$$L^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha L^{-1}\{F(s)\} + \beta L^{-1}\{G(s)\} = \alpha f(t) + \beta f(t)$$

Blanchard, P. *et al* (1999) enfatizan la importancia de esto último, dado que facilitará el determinar la transformada inversa de operaciones a primera vista complicadas por medio de calcular L^{-1} para cada término linealmente simplificable.

La transformada de Laplace, hablando de sus otras propiedades, tiene una característica que la hace exitosa en su aplicación para resolver ecuaciones diferenciales, y esto se puede ver al aplicarla a derivadas.

La transformada de una función $f(t)$ expresable como $\frac{dy}{dt}$ supone la existencia de una función $y(t)$ con transformada $L\{y\}$, esto es,

$$L\{f(t)\} = L\{\frac{dy}{dt}\}$$

La característica de la que se habla se encuentra en la solución de esta transformada, que resulta ser

$$L\{\frac{dy}{dt}\} = sL\{y\} - y(0)$$

Para comprobarlo, se utilizará la verificación hecha por Blanchard, P., Devaney, R. L. y Hall, G. R. (1999):

La definición de la transformada de Laplace dice que

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

por lo tanto, para comprobar la característica mencionada, se resolverá la transformada para la función $f(t) = \frac{dy}{dt}$ dada

$$L\{f(t)\} = L\{\frac{dy}{dt}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dy}{dt} dt$$

Integrando por partes, haciendo el cambio de variable

$$u = e^{-st}$$

y

$$dv = \frac{dy}{dt}dt$$

se puede calcular v y du, obteniendo

$$du = -se^{-st}dt$$

y

$$dv = \frac{dy}{dt}dt \rightarrow dv = dy \rightarrow \int dv = \int dy \rightarrow v = y$$

Se resuelve la integral por partes agregando los cambios hechos

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{dy}{dt}dt = [\lim_{b\to\infty} e^{-st}y(t)|_0^b] - \int_0^{\infty}(y(t))(-se^{-st}dt)$$

$$= [\lim_{b\to\infty} e^{-st}y(t)|_0^b] + \int_0^{\infty} y(t)se^{-st}dt$$

$$= e^{-\infty}y(t) - e^{0}y(0) + s\int_0^{\infty} y(t)e^{-st}dt = -y(0) + s\int_0^{\infty} y(t)e^{-st}dt$$

Observa que el segundo término es muy similar a la definición de la transformada de Laplace, por lo que, se puede reescribir el resultado así:

$$-y(0) + s\int_0^{\infty} y(t)e^{-st}dt = -y(0) + sL\{y(t)\}$$

o lo que es lo mismo

$$-y(0) + sL\{y(t)\} = sL\{y\} - y(0)$$

Así se prueba la afirmación de que

$$L\{\frac{dy}{dt}\} = sL\{y\} - y(0)$$

Esta característica es la que facilita cambiar elementos diferenciales en t por operaciones algebraicas, transformando problemas de cálculo en problemas de álgebra, y permitiendo la realización de muchas operaciones al tener como parte de sus propiedades la linealidad ya mencionada (Blanchard, 1999).

Otra propiedad es la de la translación en s, que ilustra el impacto en la transformada de multiplicar una $f(t)$ por e^{at}(Nagle, 2005). Esta propiedad dice que si $L\{f\}(s) = F(s)$ existe en $s > \alpha$, $L\{e^{ax}f(t)\} = F(s-a)$ para toda $s > a + \alpha$.
Para comprobarlo se calcula la transformada.

$$L\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty e^{t(a-s)}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a)$$

Cuatro propiedades más, expuestas por Bronson, R. (2003), son las siguientes:

1 Si $L\{f(x)\} = F(s)$ entonces para cualquier entero positivo n

$$L\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

2 Si $L\{f(x)\} = F(s)$ y si el $\lim_{x\to 0\, x>0} \frac{f(x)}{x}$ existe, entonces

$$L\{\frac{1}{x}f(x)\} = \int_s^\infty F(t)dt$$

3 Si $L\{f(x)\} = F(s)$ entonces

$$L\{\int_0^x f(t)dt\} = \frac{1}{s}F(s)$$

4 Por último, si $f(x)$ es una función periódica con un periodo ω, esto es, $f(x+\omega) = f(x)$ entonces

$$L\{f(x)\} = \frac{\int_0^\omega e^{-sx}f(x)dx}{1-e^{-\omega s}}$$

Tal como se ha presentado, la transformada de Laplace y sus propiedades, es importante saber cuándo puede existir. Se han establecido y expuesto por distintos autores las condiciones suficientes de existencia. En el siguiente subtema se presenta cuáles son y un ejemplo de comprobación.

3.1.4. Condiciones suficientes de existencia para la transformada de Laplace

Zill (1997) establece que las condiciones suficientes para que exista la transformada de Laplace se definen por el siguiente teorema, "si $f(t)$ es continua por tramos en el intervalo $[0, \infty)$ y de orden exponencial c para $t > T$, entonces $L\{f(t)\}$ existe para $s > c$".

Tal vez te preguntes a qué se refiere cuando se habla de la continuidad por tramos de $f(t)$. Nagle, K., Saff, E. B. y Snider, A. D (2005) lo explican de esta forma: Si $f(t)$ es continua en cada punto de un intervalo finito $[a, b]$ pero no lo es en una cantidad finita de puntos donde presenta discontinuidad o saltos, entonces se dice que es una función continua por partes. Ampliando la definición, establecen que la función es continua por partes en $[0, \infty)$ si es continua por partes para cualquier $N > 0$ en $[0, N]$.

Zill (1997), demuestra su teorema de la siguiente manera:

Se tiene la siguiente transformada aplicada sobre $f(t)$ que puede partirse en dos tramos

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{T} e^{-st} f(t)dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t)dt = I_1 + I_2$$

Se sabe que I_1 puede ser expresada como una adición de integrales en intervalos donde $e^{-st}f(t)$ tiene continuidad.

Para I_2 se tiene lo siguiente,

$$|I_2| \leq \int_T^{\infty} |e^{-st} f(t)| dt \leq M \int_T^{\infty} e^{-st} e^{ct} dt = M \int_T^{\infty} e^{-st+ct} dt = M \int_T^{\infty} e^{(-s+c)t} dt = M \left. \frac{e^{(-s+c)t}}{-s+c} \right|_T^{\infty}$$
$$= M \frac{e^{(-s+c)\infty}}{-s+c} - M \frac{e^{(-s+c)T}}{-s+c} = M \frac{e^{-\infty(s-c)}}{-s+c} - M \frac{e^{(-s+c)T}}{-s+c} = 0 - M \frac{e^{(-s+c)T}}{-s+c}$$
$$= -M \frac{e^{(-s+c)T}}{-s+c} = M \frac{e^{-(s-c)T}}{s-c}$$

Esto ocurre para $s > c$ para que la integral converja (exista). Recuerda que $e^{-\infty} = 0$. Si $s = c$ entonces $e^{(-s+c)t}$, para t valuado en ∞, daría $e^{(0)(\infty)}$, haciendo que la integral diverja (no exista). Si $s < c$ entonces $e^{(-s+c)t}$, para t valuado en ∞, daría $e^{(\alpha)(\infty)}$ en donde α es un número positivo, resultando en e^{∞}, haciendo de nuevo que la integral diverja.

De esta forma se prueba que para $s > c$ existe la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

y como por definición así se establece la transformada de Laplace $L\{f(t)\}$, entonces también existe ésta.

Al respecto, Nagle, K., Saff, E. B., Snider, A. D. (2005) presentan su teorema de condiciones para existencia de una forma aún más corta, pero haciendo la demostración de la misma manera, variando sólo las letras usadas para las constantes. Dicen que "Si $f(t)$ es continua por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α, entonces $L\{f\}(s)$ existe para $s > \alpha$". No hay que dejarse llevar por la extensión de una definición para determinar cuál utilizar, se recuerda que, después de todo, muchos de los libros que se están referenciando son traducciones al español de un idioma extranjero, por lo que mientras se encuentren completas y entendibles las formas de expresar un concepto la que sea que se utilice será válido.

3.1.5. Transformada de Laplace de funciones básicas

Utilizando lo ya aprendido en los temas 3.1.1., y 3.1.4., se calcularán algunas de las transformadas de Laplace para funciones básicas, facilitando de esta manera que puedas entender de donde surgen y proporcionando al final una tabla que podrás utilizar cuando lo requieras.

Retomando la definición ya provista

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

Se inicia con el cálculo de la transformada de una constante, que parte del ejemplo básico utilizado en el subtema 3.1.1.

Se había visto que si $f(t) = 1$,

$$L\{1\} = \int_0^{\infty} (e^{-st})(1)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} (e^{-st})(1)dt = \lim_{b\to\infty} \frac{-e^{-st}}{s}\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{-e^{-sb} - (-e^{(-s)(0)})}{s} = \frac{-e^{-s\infty} + e^{0}}{s} = \frac{0+1}{s} = \frac{1}{s}$$

Por tanto $L\{1\} = \frac{1}{s}$ para $s > 0$.

Se generaliza un poco más.

Si se deseará calcular la transformada de Laplace de una constante real, sólo se tendría que seguir los mismos pasos.

Esto es, si $f(t) = k$, en donde k es una constate real

$$L\{k\} = \int_0^{\infty} (e^{-st})(k)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} (e^{-st})(k)dt = \lim_{b\to\infty} k \frac{-e^{-st}}{s}\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} k\frac{-e^{-sb} - (-e^{(-s)(0)})}{s} = k\frac{-e^{-s\infty} + e^{0}}{s} = k\frac{0+1}{s} = \frac{k}{s}$$

Por tanto $L\{k\} = \frac{k}{s}$ para $s > 0$.

La transformada de una variable se calcularía como sigue.

Si $f(t) = t$,

$$L\{t\} = \int_0^{\infty} (e^{-st})(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} (e^{-st})(t)dt$$

Esta es una integral que puede ser resuelta por partes, obteniendo

$$-\frac{t}{s}e^{-st}|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{s}dt = -\frac{t}{s}e^{-st}|_0^{\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}dt = -\frac{t}{s}e^{-st}|_0^{\infty} - \frac{1}{s^2}e^{-st}|_0^{\infty}$$

Por lo que se sabe, se puede observar que el primer término es igual a 0.

$$-\frac{t}{s}e^{-st}|_0^{\infty} = 0$$

Para saber cómo resolver la indeterminación resultante de multiplicar cero por infinito por medio de la regla de L'Hopital, **reproduce** el siguiente video.

http://www.youtube.com/watch?v=REpjTjqRVRw y que también pueden encontrar en los materiales con el nombre "Cálculo por regla de LHopital.*mp4*".

Esto deja únicamente el segundo término.

$$0 - \frac{1}{s^2}e^{-st}|_0^{\infty} = -\frac{1}{s^2}e^{-\infty} + \frac{1}{s^2}e^{0} = 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

Por tanto $L\{t\} = \frac{1}{s^2}$ para $s > 0$.

Seguramente has notado que en este último ejemplo, a manera de abreviar nuestra escritura se ha empezado a escribir $\lim_{b\to\infty} f(t)|_0^b$ solamente como $f(t)|_0^{\infty}$ Éste es un recurso utilizado ampliamente por autores de libros que incluyen la transformada de Laplace para agilizar su escritura y lectura.

De la misma manera, la transformada de una variable elevada al cuadrado se calcularía así,

Si $f(t) = t^2$,

$$L\{t^2\} = \int_0^{\infty} (e^{-st})(t^2)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} (e^{-st})(t^2)dt$$

Esta es una integral que se resuelve por partes. Una vez resuelta (se empieza a obviar pasos o técnicas que han sido mecanizadas en cursos previos) da

$$-\frac{1}{s}t^2e^{-st}\Big|_0^{\infty} + \frac{2}{s}\int_0^{\infty} te^{-st}dt = -\frac{1}{s}t^2e^{-st}\Big|_0^{\infty} + \frac{2}{s}\left(-\frac{1}{s}te^{-st}\Big|_0^{\infty} - \left(-\frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}dt\right)\right) = -\frac{1}{s}t^2e^{-st}\Big|_0^{\infty} + \frac{2}{s}\left(-\frac{1}{s}te^{-st}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^{\infty}\right) = -\frac{1}{s}t^2e^{-st}\Big|_0^{\infty} - \frac{2}{s^2}te^{-st}\Big|_0^{\infty} - \frac{2}{s^3}e^{-st}\Big|_0^{\infty} = -0 - 0 - \left(\frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^3}e^{0}\right) =$$

$$-0 - 0 - \left(\frac{2}{s^3}\right)(0) - \left(\frac{2}{s^3}\right)(1)) = -\left(0 - \frac{2}{s^3}\right) = \frac{2}{s^3}$$

Por tanto $L\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$ para $s > 0$.

Un último ejemplo de la variable t elevada a un exponente entero positivo. Si $f(t) = t^3$,

$$L\{t^3\} = \int_0^{\infty} (e^{-st})(t^3)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} (e^{-st})(t^3)dt$$

Esta es otra integral que también se resuelve por partes. Puedes basarte en los ejemplos anteriores para acelerar el proceso de cálculo. Al final queda como resultado

$$\cdots - \frac{6}{s^4}e^{-st}\Big|_0^{\infty} = \frac{6}{s^4}$$

Considerando que los otros términos tendrán el mismo fin que los de los cálculos de transformadas previas, al tener $e^{-\infty}$ ó 0 multiplicando a e^{∞} (haciendo uso de la regla de L'Hopital), entonces $L\{t^2\} = \frac{6}{s^4}$ para $s > 0$.

Se puede detectar cierto comportamiento de la transformada con todos los cálculos anteriores de funciones básicas: Al transformar una constante queda ésta dividida entre s, y al hacerlo con la variable t elevada a un exponente entero positivo queda

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Para calcular la transformada de e^{at},

Si $f(t) = e^{at}$,

$$L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} (e^{-st})(e^{at})dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} (e^{-st})(e^{at})dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-st+at}dt$$
$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{(-s+a)t}dt$$

o lo que es lo mismo

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-(s-a)t}dt$$

Resolviendo por partes quedaría

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-(s-a)t}dt = \frac{1}{-(s-a)} e^{-(s-a)t}\Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{-(s-a)} = \frac{1}{s-a}$$

Por tanto $L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$ para $s > a$ (recuerda la explicación hecha en el tema 3.1.4. al respecto).

Puedes calcular, tomando como base lo anterior, transformadas de Laplace para distintas funciones.

Para complementar las transformadas que se ha calculado, **lee** el tema llamado *transformadas de Laplace del seno y del coseno* en el libro de Blanchard, P., Devaney, R y Hall, G. (1998, p. 519-521). Una vez que lo hagas podrás saber cómo calcular la transformada para las funciones mencionadas.

A continuación, se provee con una tabla basada en la presentada por Nagle, K., Saff, E. B., y Snider, A. D. (2005), que incluye las transformadas que ya se ha calculado y otras nuevas:

f(t)	L{f(t)}	**Condición para** s
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
a	$\frac{a}{s}$	$s > 0$, siendo a una constante
t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$, siendo n un entero positivo
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$, siendo n un entero positivo
sen bt	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$s > 0$
cos bt	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$s > 0$
e^{at}sen bt	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$s > a$
e^{at}cos bt	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$s > a$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$	Las dictadas por i f(t) y g(t) individualmente

Para la última fila de la tabla, recuerda que ya ha sido establecido en el subtema 3.1.3. que la transformada de Laplace tiene, al ser una integral, la propiedad de linealidad, por lo que puedes hacer uso de esa característica con las transformadas provistas y las que calcules.

Un ejemplo de la aplicación de la transformada de Laplace para la resolución parcial de ecuaciones diferenciales en problemas de valor inicial (recuerda que para tener la

solución completa en los términos deseados hará falta encontrar la transformada inversa) podría ser el siguiente (Blanchard, P. *et al*, 1999,):

Se tiene

$$\frac{dy}{dt} = y - 4e^{-t}$$

en donde han dicho que para $t = 0$ el valor de $y = 1$.

Retomando el algoritmo visto en el 3.1.2, observa que el primer parte, que es la de modelar el fenómeno en ecuaciones diferenciales, ha sido cumplida.

Siguiendo con el paso 2, aplica la transformada en ambos lados de la ecuación, obteniendo lo siguiente

$$L\{\frac{dy}{dt}\} = L\{y - 4e^{-t}\}$$

Aplicando las propiedades ya vistas (como la de linealidad) se tiene que

$$sL\{y\} - y(0) = L\{y\} - 4L\{e^{-t}\}$$

Se ha dicho que $y(0) = 1$, por lo que, sustituyendo

$$sL\{y\} - 1 = L\{y\} - 4L\{e^{-t}\}$$

En la tabla localizada justo antes de este ejemplo se busca, para ahorrar tiempo, la transformada de e^{at} y observa que es $\frac{1}{s-a}$

Utilizando ésta transformación en la ecuación, viendo que $a = -1$

$$sL\{y\} - 1 = L\{y\} - 4L\{e^{-t}\} \rightarrow sL\{y\} - 1 = L\{y\} - \frac{4}{s+1}$$

Reacomodando un poco los términos para cubrir el paso 3 del algoritmo

$$sL\{y\} - L\{y\} = 1 - \frac{4}{s+1}$$

$$L\{y\}(s-1) = 1 - \frac{4}{s+1}$$

$$L\{y\} = \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{4}{(s+1)(s-1)}\right)$$

Así, queda que

$$L\{y\} = \frac{1}{s-1} - \frac{4}{(s+1)(s-1)}$$

Repite, para tener la solución completa en los términos deseados hará falta encontrar la transformada inversa (subtema 3.1.2.), ya que no se quiere $L\{y\}$, sino la solución $y(t)$. Continua con el ejercicio en el subtema 3.1.7, *cálculo de la transformada inversa para funciones*.

En los materiales de la asignatura se ha puesto a tu disposición la tabla de transformadas de Laplace que Bronson, R. (2003) colocada como apéndice de su libro. Para tener mayor información de este libro visita la sección correspondiente a las *Fuentes de consulta*.

A manera de repaso, **reproduce** el siguiente video para ver una síntesis de la definición de la transformada de Laplace y el cálculo de la transformada de la segunda función básica vista en este tema.

http://www.youtube.com/watch?v=c3TwyoLS_98 y que también pueden encontrar en los materiales con el nombre “Repaso definición y cálculo de la transformada*.mp4*”

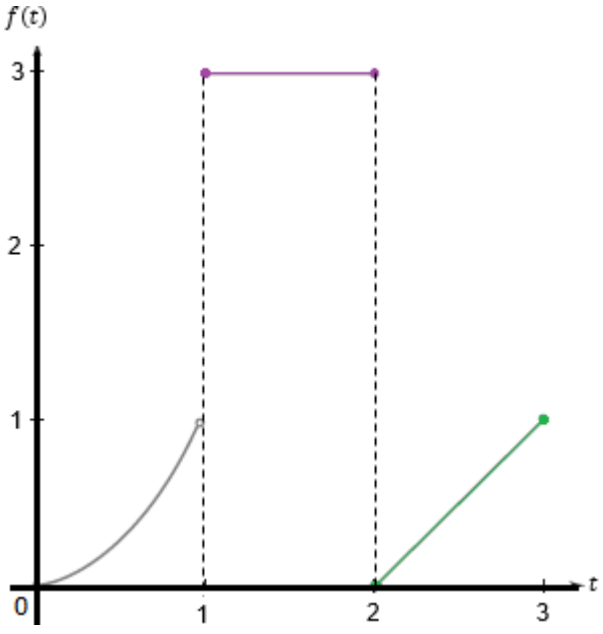
Realiza ahora los ejercicios 7.1 del número 1 al 66 del libro de Carmona & Filio (2011, p. 347-351) y corrobora tus respuestas comparándolas con las de los autores. Una vez que lo hagas, habrás comprobado tu aprendizaje de la forma de calcular la transformada de Laplace para funciones diversas.

3.1.6. Transformada de Laplace de funciones definidas por tramos

Al momento de estar trabajando en fenómenos físicos, de forma natural empiezan a surgir funciones continuas por tramos. La llegada de nuevos elementos a un sistema químico o biológico, un apagón, el encendido de un interruptor, la apertura de una puerta que cambia la forma en que se comporta la temperatura de un cuarto o frigorífico son ejemplos de situaciones que provocan discontinuidad en un sistema. Para éstas, la transformada de Laplace facilita su tratamiento, que en ocasiones puede ser difícil de analizar sin el uso de esta herramienta.

Para poder ver la forma en que se presentan las transformadas de Laplace de funciones definidas por tramos recuerda la definición de Nagle, K., Saff, E. B. y Snider, A. D (2005) que se utilizó en el subtema 3.1.4: Para que una función sea continua por tramos en un intervalo $[a, b]$ finito ésta debe de ser continua en cada punto del intervalo, con excepción de una cantidad finita de puntos donde la función tiene discontinuidad. Esta función es continua por tramos en el intervalo $[0, \infty)$ si es continua por partes para $N > 0$ en $[0, N]$. Para completar, debe de existir el límite de $f(t)$ desde el interior de cada tramo hasta cualquier extremo de éste.

Un ejemplo gráfico de una función continua por tramos es el siguiente:



Siendo la función representada por

$f(t) = \{(t-2)^2, \quad 0 \leq t < 1,3, \quad 1 < t < 2,t, \quad 2 < t \leq 3.$

Existe la transformada de Laplace de una $f(t)$ continua por tramos siempre que crezca más lento que una exponencial. Nagle, K., *et al* (2005) profundizan en ello con la siguiente definición: Se dice que una función "$f(t)$ es de orden exponencial α si existen constantes positivas T y M tales que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, para toda $t \geq T$".

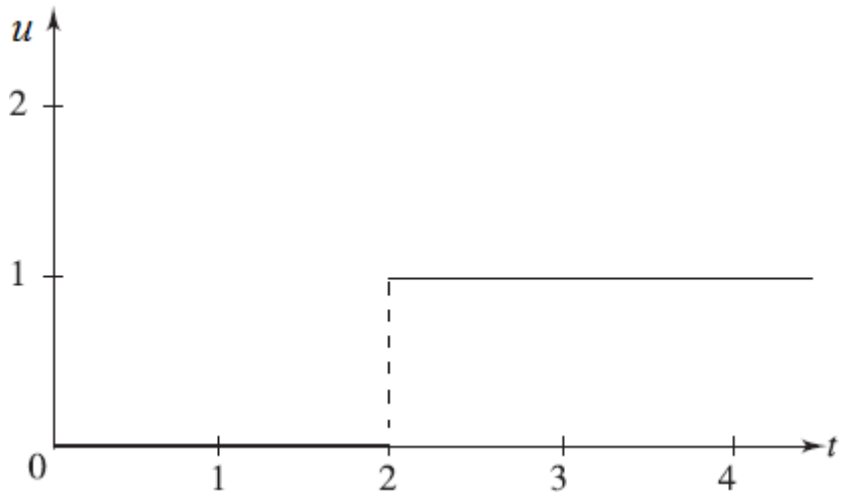
Carmona, I. y Filio, E. (2011) sintetizan aún más dejando la definición sólo como "$f(t)$ es función de orden exponencial $\alpha \leftrightarrow$ Existen M, $\alpha \in R$ tales que: $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$".

Ejemplo de ello es $f(t) = e^{3t}\text{sen}2t$. Esta función es de orden exponencial con $\alpha = 3$ y $M = 1$ dado que se cumple la definición al tener que $|e^{3t}\text{sen}2t| \leq e^{5t}$.

Una función que no sería de orden exponencial es e^{5t^2}, ya que crece más rápido que $e^{\alpha t}$.

Para explicar cómo resolver este tipo de funciones se pondrá el ejemplo de una función escalón unitario.

Una función escalón unitario tiene la siguiente forma



En el diagrama el escalón inicia en $t = 2$, haciendo que la función $u(t)$ salte de 0 a 1.

Supón, para generalizar, que no se sabe en donde se encuentra el salto, por lo que se establece que se da en un tiempo desconocido a. Nuestra función quedaría entonces modelada así

$$u(t) = \{0, \quad t < a \; 1, \quad t \geq a$$

La transformada de Laplace, por su definición (subtema 3.1.1), sería

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

o en éste caso,

$$L\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t)dt$$

De esta manera, se separa en dos partes su cálculo basándose en la definición de su modelo

$$L\{u(t)\} = \int_0^{a} e^{-st} u(t)dt + \int_a^{\infty} e^{-st} u(t)dt$$

Al ver la expresión se detecta que el primer término es igual a 0 debido a que $u(t) = 0$ para todo $t < a$

$$L\{u(t)\} = \int_0^{a} (e^{-st})(0)dt + \int_a^{\infty} e^{-st} u(t)dt = 0 + \int_a^{\infty} e^{-st} u(t)dt$$

Como $u(t) = 1$ para todo $t > a$,

$$L\{u(t)\} = 0 + \int_a^{\infty} (e^{-st})(1)dt = \int_a^{\infty} e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_a^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-sb}}{-s} - \frac{e^{-sa}}{-s}$$

$$L\{u(t)\} = 0 + \frac{e^{-sa}}{s} = \frac{e^{-sa}}{s}$$

Así, se ha calculado la transformada de Laplace para la función escalón unitario

$$L\{u(t)\} = \frac{e^{-sa}}{s} = e^{-sa}\frac{1}{s}$$

Si se aplicará la transformada inversa, haciendo uso de su definición y de las propiedades, se vería que la función $\frac{1}{s}$ es la transformada de 1, lo cual, no es de sorprender, ya que la función original en el dominio de t indicaba eso para $t \geq a$. La parte de la transformada de Laplace obtenida para la función escalón unitario, que indica que a partir de a es donde $f(t)$ es igual a 1 es debida a la propiedad de traslación en t, y es dada por e^{-sa}.

La propiedad de traslación en t Edwards, (2009) dice que si la transformada de la función $f(t)$ existe para $s > c$ se tiene que

$$L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-sa}F(s)$$

Esto genera entonces que la transformada inversa se presente de la siguiente manera

$$L^{-1}\{e^{-sa}F(s)\} = u(t-a)f(t-a)$$

en $s > c + a$.

De igual forma, al igual que las funciones continuas por tramos y como una extensión de ellas, existen las funciones periódicas, que no son sino funciones que se repiten. Éstas se definen tomando en cuenta que $f(t)$ es periódica si se encuentra un número $p > 0$ en el que $f(t+p) = f(t)$, siendo p el periodo de f, y encontrándose como el mínimo valor en que se cumple la igualdad presentada.

Para calcular la transformada de Laplace para este tipo de funciones, Edwards, (2009) mencionan que si $f(t)$ es función periódica con periodo p continua por tramos en $t \geq 0$, su transformada existe en $s > 0$ y se determina por

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-pt}}\int_0^p e^{-st}f(t)dt$$

Lee ahora el capítulo 7.5 del libro de Edwards y Penney de la página 482 a 488 para ver ejemplos de lo anterior, la demostración y aplicación de los conceptos en funciones periódicas. Una vez que lo hayas revisado, deberás ser capaz de entender la forma en

que se puede aplicar el contenido de este tema en el cálculo de la transformada de Laplace para funciones continuas por tramos y periódicas. Para mayor información del libro visita la sección *Fuentes de consulta*.

3.1.7. Cálculo de la transformada inversa para funciones

Como ya fue mencionado en el subtema 3.1.2, el cálculo de la transformada inversa es de suma importancia para tener una solución completa una vez que se ha regresado a expresar el resultado en términos de la incógnita original. Se ha planteado ya un ejemplo de la forma de aplicar la transformada inversa, pero es necesario ver utilizadas las propiedades como la linealidad junto con las soluciones establecidas en el 3.1.5 para que sepas como integrar los conocimientos adquiridos hasta el momento para resolver sistemas de mayor complejidad.

Blanchard, P. (1999) presenta el siguiente ejemplo.

Retoma primeramente el último ejercicio del 3.1.5, aquél que se dejó inconcluso por no haber aplicado la transformada inversa para obtener la solución $y(t)$.

Recordando, se tenía que $\frac{dy}{dt} = y - 4e^{-t}$

y habían dicho que para $t = 0$ el valor de $y = 1$.

La transformada de Laplace que se obtuvo fue

$$L\{y\} = \frac{1}{s-1} - \frac{4}{(s+1)(s-1)}$$

Como se quiere la solución $y(t)$ se aplica la transformada inversa en ambos lados de la ecuación.

$$y = L^{-1}\{\frac{1}{s-1} - \frac{4}{(s+1)(s-1)}\}$$

Si se hace uso de la propiedad de linealidad vista en el subtema 3.1.3, se puede separar la expresión así

$$y = L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} - L^{-1}\{\frac{4}{(s+1)(s-1)}\}$$

Observa que el primer término es la transformada de una función $f(t)$ que ya aparece en la tabla provista en el 3.1.5, pero el segundo término tendrá que descomponerlo aún más para que quede expresado como una combinación de transformadas ya conocidas. Un recurso muy utilizado es hacer uso del método de fracciones parciales.

De esta forma

$$\frac{4}{(s+1)(s-1)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-1)}$$

Despejando A y B tendrías entonces que

$$A = -2,$$
$$B = 2.$$

Sustituyendo los valores de las constantes temporales en la expresión

$$\frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-1)} = -\frac{2}{(s+1)} + \frac{2}{(s-1)} = \frac{2}{(s-1)} - \frac{2}{(s+1)}$$

Esta nueva expresión puede reconocerse en cada uno de sus miembros como la transformada de una función ya escrita en nuestra tabla, para ser exactos, de una exponencial.

Entonces

$$y = L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} - L^{-1}\{\frac{4}{(s+1)(s-1)}\} = L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} - L^{-1}\{\frac{2}{s-1} - \frac{2}{s+1}\}$$

$$y = L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} - L^{-1}\{\frac{2}{s-1}\} + L^{-1}\{\frac{2}{s+1}\}$$

$$y = L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} - 2L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} + 2L^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}$$

$$y = -L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} + 2L^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}$$

En tabla se tiene que $L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$

lo que lleva a

$$y = -L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} + 2L^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} = -e^{at} + 2e^{-t}$$

La solución del ejercicio $\frac{dy}{dt} = y - 4e^{-t}$ con la condición inicial $y(0) = 1$ ya completa (habiendo aplicado el paso 4 del algoritmo) sería

$$y(t) = -e^{at} + 2e^{-t}$$

Si se deseará construir una tabla para facilitar el cálculo de transformadas inversas se podría basar en aquella que se construyó para el cálculo de transformadas, utilizando las funciones calculadas en s para encontrar las de t. Ejemplificando esto se coloca la siguiente tabla, agregando además un par de funciones en s adicionales.

$L^{-1}\{F(s)\}$	$f(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{a}{s}$	a
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$e^{at}t^n$
$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\text{sen } bt$

$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\cos bt$
$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at}\text{sen } bt$
$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at}\cos bt$
$aF(s)+bG(s)$	$af(t)+bg(t)$
$\frac{b}{s^2-b^2}$	$\text{senh } bt$
$\frac{b}{s^2-b^2}$	$\cosh bt$

Para ver otros ejercicios, en donde uno incluye el uso de fracciones parciales, **revisa** los ejemplos 1, 2 y 3 del libro de Zill, D. G. y Cullen, M. R. (2009, p. 263-265). Al hacerlo, habrás reforzado los conocimientos de cómo calcular la transformada inversa de funciones.

Más adelante, en el subtema 3.1.10., se presenta una aplicación en fenómenos físicos de lo aprendido hasta ahora.

Resuelve los ejercicios 7.4 del 1 al 32 en el libro de Nagle, Saff & Snider y compara tus resultados con los provistos por los autores para los números impares (p. 374-375, B-16). Ya que lo hagas, habrás corroborado lo que aprendiste del cálculo de la transformada inversa y la aplicación del desarrollo en fracciones parciales.

3.1.8. Derivación de la transformada

La derivación de la transformada de Laplace encuentra su solución como sigue:

De acuerdo a Carmona & Filio (2011, p. 375), si se tiene una transformada para una función $f(t)$ tal que

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

entonces

$$L\{tf(t)\} = F'(s)$$

Para comprobarlo, se hará uso de la definición de la transformada de Laplace.

Se tiene que

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Derivando con respecto a s ambos lados

$$\frac{dF}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{\infty} \frac{\delta}{\delta s} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{\infty} -te^{-st} f(t)dt = -\int_0^{\infty} e^{-st} tf(t)dt = -L\{tf(t)\}$$

$$\frac{dF}{ds} = F'(s) = -L\{tf(t)\}$$

Despejando queda

$$L\{tf(t)\} = -F'(s)$$

Así se comprueba el teorema.

Siguiendo los mismos pasos para la segunda y tercera derivadas, se encuentra que existe la siguiente secuencia

$$F(s) = L\{f(t)\} = L\{(-t)^0 f(t)\}$$

$$F'(s) = L\{-tf(t)\} = L\{(-t)^1 f(t)\}$$

$$F''(s) = L\{t^2 f(t)\} = L\{(-t)^2 f(t)\}$$

$$F'''(s) = L\{-t^3 f(t)\} = L\{(-t)^3 f(t)\}$$

Generalizando, se puede decir que la derivada de una transformada puede ser calculada como

$$F^n(s) = L\{-t^n f(t)\}$$

La aplicación que se podría encontrar en esto es para facilitar y resolver transformadas por medio de la identificación de formas conocidas.

Por ejemplo, si se observa una función de la forma $t\cos\omega t$ de la cual se requiere calcular la transformada de Laplace, al ver el término t precediendo la parte con el coseno se sabe que se puede expresar su transformada como una derivada.

La tabla conformada en el tema 3.1.5 dice que la transformada de $\cos bt$ es igual a $\frac{s}{s^2+b^2}$ por lo que uniendo el concepto de la derivada con la transformada ya conocida para el coseno quedaría

$$L\{t\cos\omega t\} = -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+\omega^2} = \frac{s^2+\omega^2-2s^2}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{s^2-2s^2+\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

No hay que perder de vista los signos, ya que al ser la primera derivada, dada la generalización hecha, se debe despejar la expresión para que quede como

$$F'(s) = -L\{tf(t)\}$$

o

$$-F'(s) = L\{tf(t)\}$$

Según lo necesite.

Si en lugar de t se hubiera tenido precediendo a la función coseno t^2 se sabría que se puede aplicar una segunda derivada en la transformada, y de haber sido t^3 la tercera.

Otra forma de expresarlo la encontrarás en el tema *derivadas de una transformada* de Zill, D. G. y Cullen, M. R. (2009, p. 282-284). **Revisa** en ella los ejemplos 1 y 2, además de dar lectura al tema *convolución* y el ejemplo 3. Ya que lo hagas descubrirás que entre diferentes autores existen diversas formas de presentar y aplicar un mismo concepto. Al final del tema 3.1.9., darás lectura a otro material que te permitirá reforzar lo anterior.

Es posible que te preguntes si, así como hay una forma de identificar rápidamente expresiones que facilitan el cálculo de una transformada por medio de su derivación, exista algo similar, pero haciendo uso de la integración. En el siguiente tema se presenta cómo hacerlo, además de que resolverás ejercicios para practicar lo aprendido de la derivación de la transformada.

3.1.9. Integración de la transformada

La integración de la transformada de Laplace se encuentra sujeta a que la función $f(t)$ satisfaga las condiciones de existencia, a que el límite cuando $t \to 0^+$ de $\frac{f(t)}{t}$ exista y a que la transformada de $f(t)$ sea $F(s)$.

Si se cumple lo anterior, Carmona & Filio (2011) puntualizan en su teorema que se puede establecer que

$$L\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$$

Para comprobarlo, siguen el procedimiento que se presenta a continuación:

Se hará que $G(t)$ sea igual a la función que se desea transformar.

$$G(t) = \frac{f(t)}{t}$$

Despejando,

$tG(t) = f(t)$.

Si se utiliza la transformada en los dos lados

$$L\{tG(t)\} = L\{f(t)\}$$

Se puede distinguir una propiedad ya conocida del lado izquierdo, que es la correspondiente a la forma en que se ve una derivada de transformada por estar multiplicado por t.

Haciendo uso de lo visto en el tema anterior,

$$-\frac{d}{ds}L\{G(t)\} = L\{f(t)\}$$

Si $L\{G(t)\} = g(s)$, se tiene que

$$L\{f(t)\} = -\frac{dg(s)}{ds}$$

y que

$$-L\{f(t)\} = -F(s) = \frac{dg(s)}{ds}$$

Despejando e integrando

$$g(s) = -\int_{\infty}^{s} f(\sigma)d\sigma = \int_{s}^{\infty} f(\sigma)d\sigma$$

Entonces,

$$g(s) = L\{G(t)\} = L\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_{s}^{\infty} f(\sigma)d\sigma$$

La aplicación que se le puede dar a esta propiedad es muy similar a la que se encontró en la derivación de transformadas: facilita resolverlas por medio de la identificación de formas conocidas.

Por ejemplo, si se observa una función de la forma $\frac{sen3t}{t}$ de la cual se quiere calcular la transformada de Laplace, al ver el término $\frac{1}{t}$ como parte factorizable de la función se sabe que se puede expresar su transformada como una integral.

La tabla de transformadas de Bronson, R. (2003) que coloca como apéndice de su libro y provista como parte de los materiales del curso (referenciada al final del tema 3.1.5) dice que la transformada de $sen3t$ es igual a $\frac{3}{s^2+3^2}$, por lo que uniendo el concepto de la integral con la transformada ya conocida para el seno quedaría que, dado

$$L\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_s^\infty f(\sigma)d\sigma$$

para $f(t) = sen3t$

$$L\{\frac{sen3t}{t}\} = \int_s^\infty \frac{3}{\sigma^2+9}d\sigma = \tan^{-1}\frac{\sigma}{3}\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{3}$$

Una vez que has visto el efecto que tiene la derivación e integración de la transformada de Laplace como parte de sus propiedades, podrás hacer uso de estas herramientas para facilitar su cálculo al tratar de resolver problemas relacionados con fenómenos físicos en donde veas que puede ser utilizada.

Como se mencionó en el tema previo, distintos autores muestran el mismo concepto de formas diferentes. **Lee** al tema 7.4*, Derivadas, integrales y productos de las transformadas* en el libro de Edwards y Penney (2009, p. 474-481, 781) resolviendo los ejercicios del 1 al 38, así como también los ejercicios 7.2 del 1 al 17 y del 23 al 28 del libro de Carmona & Filio (2011, p. 359-363) comparando tus resultados con los de los autores. Una vez que lo hagas habrás reforzado los conceptos de *convolución de dos funciones*, *derivación* e *integración de transformadas*, evaluando tu aprendizaje de ello.

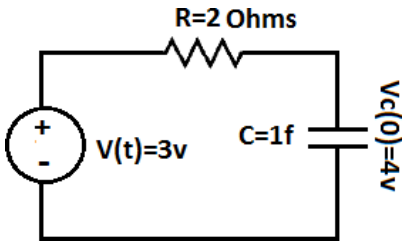
3.1.10. Aplicaciones de la transformada de Laplace en fenómenos físicos

El uso de la transformada para el cálculo de variables involucradas en fenómenos físicos no es sino la aplicación de todos los conocimientos adquiridos hasta el momento sobre modelos matemáticos expresables por ecuaciones diferenciales que encuentren una facilidad de resolución al utilizar la transformada de Laplace.

Problemas que pueden ser resueltos suelen incluir de circuitos eléctricos, osciladores armónicos forzados, con forzamiento discontinuo, deflexión de vigas, péndulos, entre otros.

Blanchard, P. *et al* (1999) presentan el siguiente ejemplo:

Imagina que tienes este circuito RC



en el que v_c es el voltaje del capacitor, $V(t)$ el proporcionado por la fuente, C la capacitancia y R la resistencia.

Supón que el problema radica en que se necesita saber el voltaje existente en el capacitor en cierto momento del tiempo para poder tomar acciones concretas sobre algún elemento presente dentro de un sistema de energías renovables.

Se sabe, por los estudios realizados sobre circuitos eléctricos (material de otros cursos), que el sistema puede modelarse como

$$RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = V(t)$$

Observa en el diagrama que existe una condición inicial que indica que $v_c(0) = 4$.

Introduciendo los valores conocidos, se tiene que para las condiciones establecidas

$$2\frac{dv_c}{dt} + v_c = 3$$

Con

$$v_c(0) = 4$$

Si se quisiera representar la variación que tiene el voltaje en el capacitor con respecto al tiempo, despejando queda

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{3 - v_c}{2} = \frac{3}{2} - \frac{v_c}{2}$$

Resolver haciendo uso de la transformada de Laplace.

$$L\{\frac{dv_c}{dt}\} = L\{\frac{3}{2}\} - L\{\frac{v_c}{2}\} = \frac{3}{2}L\{1\} - \frac{1}{2}L\{v_c\}$$

Sustituyendo $L\{\frac{dv_c}{dt}\}$ por lo ya visto en el 3.1.3

$$L\{\frac{dy}{dt}\} = sL\{y\} - y(0)$$

Se tiene que

$$sL\{v_c\} - v_c(0) = \frac{3}{2}L\{1\} - \frac{1}{2}L\{v_c\}$$

y si se introduce la condición inicial provista

$$sL\{v_c\} - 4 = \frac{3}{2}L\{1\} - \frac{1}{2}L\{v_c\}$$

Despejando la variable que se desea conocer y resolviendo la transformada de $L\{1\}$, dado que ya la conoces,

$$sL\{v_c\} + \frac{1}{2}L\{v_c\} = \frac{3}{2}\frac{1}{s} + 4$$

$$sL\{v_c\} + \frac{1}{2}L\{v_c\} = \frac{3}{2s} + 4$$

$$(s + \frac{1}{2})L\{v_c\} = \frac{3}{2s} + 4$$

$$L\{v_c\} = \frac{3}{2s(s + \frac{1}{2})} + \frac{4}{s + \frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\frac{1}{s(s + \frac{1}{2})} + \frac{4}{s + \frac{1}{2}}$$

Usando fracciones parciales para descomponer el primer término, ya que resulta demasiado complejo como para identificar alguna transformada conocida que se le parezca

$$\frac{1}{s(s + \frac{1}{2})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + \frac{1}{2})}$$

Despejando y obteniendo los valores de las constantes temporales A y B para sustituir, posteriormente, en la expresión original, queda

$$\frac{1}{s(s + \frac{1}{2})} = \frac{2}{s} - \frac{2}{(s + \frac{1}{2})}$$

Regresando para incorporar la sustitución que se obtiene después de aplicar fracciones parciales

$$L\{v_c\} = \frac{3}{2}\frac{1}{s(s + \frac{1}{2})} + \frac{4}{s + \frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{s} - \frac{2}{(s + \frac{1}{2})}\right) + \frac{4}{s + \frac{1}{2}} = \frac{6}{2s} - \frac{3}{s + \frac{1}{2}} + \frac{4}{s + \frac{1}{2}} = \frac{3}{s} + \frac{1}{s + \frac{1}{2}}$$

Utilizando la transformada inversa y la propiedad de linealidad, ya que no requiere obtener la solución $L\{v_c\}$ sino v_c, tienes

$$v_c = L^{-1}\left\{\frac{3}{s} + \frac{1}{s + \frac{1}{2}}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{3}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{2}}\right\} = 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{2}}\right\}$$

que resultan ser expresiones de forma conocida, ya que son transformadas de funciones para las que ya las has calculado.

$$L\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

en donde $a = -\frac{1}{2}$.

Queda entonces

$$v_c = 3L^{-1}\{\frac{1}{s}\} + L^{-1}\{\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\} = e^{-\frac{t}{2}} + 3$$

De esta forma se ha encontrado una solución al problema de saber qué voltaje tendrá el capacitor durante cierto momento en el tiempo, facilitando de ésta manera tomar decisiones respecto del sistema de energías renovables.

Para ver la aplicación de la transformada de Laplace en un problema que involucra un oscilador armónico forzado y uno con forzamiento discontinuo, **consulta** en el capítulo 6 de Blanchard, P., Devaney, R. L. y Hall, G. R. (1999) las páginas 522 a 526; **revisa** también los ejemplos 1 al 3 de Carmona & Filio del final del capítulo 7 (2011, p. 414-417). Por último, **lee** los ejemplos 5 al 8 de Zill, D. (1997, p. 336-342). Una vez que lo hagas deberás poder resolver ejercicios similares aplicando los conceptos vistos a lo largo de todo el tema 3.1.

3.2. Series de Fourier

En ocasiones será necesario que para solucionar problemas relacionados con las energías renovables debas resolver problemas modelables con ecuaciones diferenciales del tipo $f(x) = ay'' + by' + cy$ siendo dada $f(x)$ y donde x se encuentra entre 0 y un límite L, tal que $y(0) = y(L) = 0$.

Para resolverlas pudieras aplicar las técnicas ya estudiadas a lo largo de las unidades y temas previos, buscando la solución general de la parte homogénea $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$, calculando la solución particular y_p de la parte no homogénea, y obteniendo las constantes c_1 y c_2 para que $y = y_h + y_p$ sea válida para las condiciones dadas $y(0) = y(L) = 0$.

Otra forma de hacerlo es extendiendo la forma en que se define $f(t)$ en el intervalo y a toda la recta, por medio del uso de ciertas condiciones que tienen que ver con la manera en que se repite la función en el intervalo, dado que, si la función tiene continuidad por tramos, entonces puede ser representada por series o *componentes periódicos*.

Para algunas funciones se representan por medio de series, su tratamiento suele ser más adecuado.

Dentro de los fenómenos físicos existen, entre muchos otros, sistemas eléctricos y mecánicos que suelen incluir componentes periódicos de fuerza que van más allá de ser tan sólo combinaciones lineales de cosenos y de senos. Aún con esto, pueden ser representados como series infinitas de elementos trigonométricos, extendiéndose esta característica a cualquier función con periodicidad adecuada, permitiendo resolver ecuaciones por medio de superponer términos trigonométricos reemplazando sumas finitas por series infinitas (Edwards & Penney, 2009).

Como ya había sido visto en el tema 3.1., una función periódica es aquella en que existe un número positivo p que permite cumplir

$$f(t+p) = f(t)$$

Siendo conocido p como el periodo de $f(t)$.

Algo importante de recalcar es que si p es periodo de una función también lo es $2p$, $3p$, $4p$ y así de forma sucesiva, por lo que el periodo no es único para una $f(t)$.

Si se llega a encontrar un periodo, siendo éste el más pequeño número positivo que permite periodicidad para una $f(t)$, se le conoce como *el periodo* de la función o *periodo fundamental*. Un ejemplo de ello son las funciones seno y coseno, que tienen periodo de 2π. Si se hiciera una combinación lineal (cualquiera que esta fuera) de esas funciones el periodo seguiría siendo 2π. Se debe señalar que la función que modela una señal cuadrada no podría ser expresada así, ya que las combinaciones presentadas son continuas. Otro ejemplo es la función tangente, con periodo fundamental π (Nagle, Saff & Snider, 2005).

3.2.1. Definición de las series de Fourier

En 1822, Jean Baptiste Joseph Fourier, científico de Francia, presentó en su escrito, *la teoría analítica del calor*, una teoría sobre su conducción, haciendo uso de series trigonométricas con coeficientes que determinó de manera ingeniosa (Carmona & Filio, 2011). Él afirmaba que cualquier función que tuviera 2π como periodo podía ser representada con series trigonométricas de tipo infinito, que tuvieran la siguiente forma

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\operatorname{sen} nt)$$

A las series que presenten la forma anterior se les llamará series de Fourier (Edwards & Penney, 2009).

Autores como Zill, D. G. (1997) presentan pequeñas variaciones en esta definición, declarando que para una función $f(t)$ que está definida en $(-p, p)$ su serie de Fourier es

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{p}t+b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}t)$$

en donde

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(t)dt$$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(t)\cos\frac{n\pi}{p}t\,dt$$

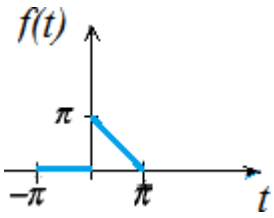
$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}t\,dt$$

A éstos últimos, se les conoce como *coeficientes de Fourier* de la función.

Para conocer cómo se obtienen los coeficientes de Fourier, **lee** el tema 10.2 del libro de Zill, D. G. (1997, p. 444-445), *series de Fourier*. Una vez leído, deberá resultar más clara la forma en que fueron calculados. En el tema 3.2.3, se profundiza en ello.

Un ejemplo de la aplicación de estos coeficientes, presentado por el mismo autor, es el siguiente (Zill, 1997):

Supón que se tiene el diagrama



el cual puede ser modelado como

$$f(t) = \{0, \quad -\pi < t < 0 \; \pi - t, \quad 0 \le t < \pi$$

Si se deseará desarrollar el comportamiento de la función anterior en una serie de Fourier se tendría que dejarlo representado para que quedara en la forma de

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{p}t + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}t)$$

Se puede notar que para el periodo $p = \pi$, utilizando las ecuaciones para el cálculo de los coeficientes de Fourier de la función, se tiene que

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{\pi} f(t)dt] = \frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0} 0dt + \int_{0}^{\pi} (\pi - t)dt]$$

$$= \frac{1}{\pi}[\pi t - \frac{t^2}{2}]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}[(\pi \cdot \pi - \frac{\pi^2}{2}) - (\pi \cdot 0 - \frac{0^2}{2})] = \frac{1}{\pi}(\pi \cdot \pi - \frac{\pi^2}{2}) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos\frac{n\pi}{p}t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\frac{n\pi}{\pi}t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0} 0dt + \int_{0}^{\pi} (\pi - t)\cos nt\,dt] = \frac{1}{\pi}[(\pi - t)\frac{\operatorname{sen} nt}{n}|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} nt\,dt] =$$

$$\frac{-\cos n\pi + 1}{n^2\pi} = \frac{1 - \cos n\pi}{n^2\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}$$

Esto es debido a que $\cos n\pi = (-1)^n$

Por último,

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{\pi}t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\text{sen}\,nt\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{\pi} (\pi - t)\,\text{sen}\,nt\,dt\right] = \frac{1}{n}$$

Sustituyendo los coeficientes obtenidos en la forma de la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}t + b_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}t\right)$$

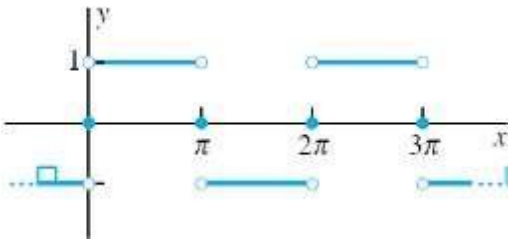
$$f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi}{p}t + \frac{1}{n}\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}t\right)$$

Como se mencionó que el periodo es π,

$$f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi}{\pi}t + \frac{1}{n}\text{sen}\,\frac{n\pi}{\pi}t\right)$$

$$f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nt + \frac{1}{n}\,\text{sen}\,nt\right)$$

Revisa los ejemplos 1 y 2 del capítulo 9.1 del libro de Edwards & Penney (2009, p.585-587). Para el primero necesitarás la siguiente figura y función para una señal cuadrada. Una vez que lo hagas estarás listo para realizar los ejercicios que más adelante se te indicará.



Función de onda cuadrada. Fuente: tomado de Edwards & Penney, (2009).

La función que modela el diagrama anterior y dada por los autores se representa por

$$f(t) = \{-1,\ -\pi < t < 0\ +1,\ 0 < t < \pi\ 0,\ \&t = -\pi, 0 \text{ ó } \pi \qquad (20)$$

Estas series serán frecuentemente aplicadas en fenómenos periódicos, como corrientes, vibraciones, oscilaciones, movimientos telúricos, resonancias, y muchos otros más. Representar funciones haciendo uso de éstas es uno de los métodos más usados para solucionar ecuaciones diferenciales parciales.

Realiza los ejercicios 10.2 del capítulo 10 de Zill, D. G. (1997, p. 448), del ejercicio 1 al 16, y ya que los termines consulta las respuestas correctas para los ejercicios impares en la página R-24 del apéndice de respuestas. Una vez que lo hagas, podrás valorar los conocimientos que adquiriste en este primer tema.

Ahora que se ha visto la definición de las series de Fourier, y para entender el fundamento que tienen, se estudiará lo que son las series trigonométricas y las funciones periódicas, ya que Fourier las necesitó para crear la propia.

3.2.2. Series trigonométricas y funciones con periodicidad

Se ha visto al inicio del tema 3.2. que una función periódica es en la que existe un número positivo p que hace que se cumpla

$$f(t + p) = f(t)$$

Siendo conocido p como el periodo de $f(t)$. Observa que al número positivo mínimo que pudiera ocupar p para que esto se cumpliera era conocido como *el periodo* o *periodo fundamental* de la función.

Un ejemplo de esto es la función seno, que como ya se había mencionado, tiene periodo 2π. Esto significa que se repite en $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi \ldots n\pi$, por lo que $\text{sen}(t + 2\pi) = \text{sen}(t + 4\pi) = \cdots = \text{sen}t$. Esta propiedad servirá para probar algunos teoremas que se expresarán más adelante.

En ocasiones se requiere calcular el mínimo periodo, el cual va a encontrarse así

$$p = \frac{\text{periodo natural de } f(t)}{n} \rightarrow n = c \text{ de } \angle$$

Esto es, el coeficiente del ángulo es n (Carmona & Filio, 2011).

Algunos autores suelen utilizar otras letras para denominar al periodo, por ejemplo, la letra T.

Esto servirá para entender y tratar las series trigonométricas.

Una serie trigonométrica tendrá una forma como esta

$$a_0 + a_1 cosx + b_1 senx + a_2 cos2x + b_2 sen2x + \cdots + a_n cosnx + b_n sennx + \cdots$$

Siendo a_i y b_i coeficientes constituidos por números constantes reales. Es común que el periodo de estas series sea 2π pero puede ser utilizada la parte teórica para resolver cualquier periodo.

Carmona, I. y Filio, E., (2011) presentan tres teoremas que serán de utilidad:

1 Supón que $f(t)$ y $g(t)$ son funciones periódicas con periodo p, entonces, si $h(t) = af(t) + bg(t)$ donde tanto a como b pertenecen a los números reales, $h(t)$ también es función periódica con periodo p.

2 Si $f(t)$ tiene como periodo a p, entonces np es periodo también, donde n es número entero.

3 $sen\frac{n\pi t}{k}$ y $cos\frac{n\pi t}{k}$ para todo entero positivo $n \leq k$, son funciones que satisfacen en $-k \leq t \leq k$ las propiedades de ortogonalidad mostradas a continuación

$$\int_{-k}^{k} cos\frac{n\pi t}{k} cos\frac{m\pi t}{k}\, dt = f(x) = \{k, \quad n = m\ 0, \quad n \neq m$$

$$\int_{-k}^{k} sen\frac{n\pi t}{k} sen\frac{m\pi t}{k}\, dt = f(x) = \{k, \quad n = m\ 0, \quad n \neq m$$

$$\int_{-k}^{k} \cos\frac{n\pi t}{k}\,\text{sen}\frac{m\pi t}{k}\,dt = 0{,}0 \text{ para todo } n, m$$

Para dar certeza a las afirmaciones hechas, se comprueban los teoremas.

- Para el primero, como $f(t)$ es función periódica con un periodo p tal que $f(t) = f(t+p)$, y $g(t)$ es función periódica a la vez con periodo p tal que $g(t) = g(t+p)$, se tiene que

  $$h(t+p) = af(t+p) + bg(t+p) = af(t) + bg(t) = h(t)$$

- Comprobando el segundo, si $f(t)$ tiene como periodo a p tal que $f(t) = f(t+p)$ y $f(t+p) = f(t+2p)$ debido a que es periódica en p, entonces

  $$f(t) = f(t+p) = f(t+2p) = \cdots = f(t+np) \rightarrow n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ y } t \in R$$

- Para comprobar el tercer teorema, se resuelve la integral del inciso a) para ver que su resultado sea primero k si $n = m$ y 0 si $n \neq m$. Las integrales del inciso b) y c) tienen una comprobación similar, únicamente cambiando las identidades utilizadas, por lo que no se resolverán.

En el primer caso

$$f(t) = \int_{-k}^{k} \cos\frac{n\pi t}{k}\cos\frac{m\pi t}{k}\,dt = \int_{-k}^{k} \cos^2\frac{n\pi t}{k}\,dt$$

Se sabe que $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, por lo que se puede reescribir como

$$f(t)=\int_{-k}^{k}\frac{1+\cos\frac{2n\pi t}{k}}{2}dt=\frac{1}{2}\int_{-k}^{k}1+\cos\frac{2n\pi t}{k}dt=\frac{1}{2}\left(\int_{-k}^{k}dt+\int_{-k}^{k}\cos\frac{2n\pi t}{k}dt\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[t+\frac{k}{2n\pi}\operatorname{sen}\frac{2n\pi t}{k}\right]_{-k}^{k}=\left[\frac{k}{2}+\frac{k}{2n\pi}\operatorname{sen}\frac{2n\pi k}{k}\right]-\frac{1}{2}\left[-k+\frac{k}{2n\pi}\operatorname{sen}\frac{-2n\pi k}{k}\right]$$
$$=\frac{k}{2}+\frac{k}{2}\frac{1}{2n\pi}\operatorname{sen}2n\pi+\frac{k}{2}-\frac{k}{2}\frac{1}{2n\pi}\operatorname{sen}-2n\pi$$
$$=\frac{2k}{2}+\frac{k}{4n\pi}\operatorname{sen}2n\pi-\frac{k}{4n\pi}\operatorname{sen}-2n\pi=\frac{2k}{2}+\frac{k}{4n\pi}(\operatorname{sen}2n\pi-\operatorname{sen}-2n\pi)$$
$$=\frac{2k}{2}=k$$

En el segundo caso, $n\neq m$,

$$f(t)=\int_{-k}^{k}\cos\frac{n\pi t}{k}\cos\frac{m\pi t}{k}\,dt$$

Se sabe que $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$, por lo que se puede reescribir como

$$f(t)=\frac{1}{2}\int_{-k}^{k}\cos\frac{(n+m)\pi t}{k}+\cos\frac{(n-m)\pi t}{k}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{k}{(n+m)\pi}\operatorname{sen}\frac{(n+m)\pi t}{k}+\frac{k}{(n-m)\pi}\operatorname{sen}\frac{(n-m)\pi t}{k}\right]_{-k}^{k}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{k}{(n+m)\pi}\operatorname{sen}\frac{(n+m)\pi k}{k}+\frac{k}{(n-m)\pi}\operatorname{sen}\frac{(n-m)\pi k}{k}\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{k}{(n+m)\pi}\operatorname{sen}\frac{-(n+m)\pi k}{k}+\frac{k}{(n-m)\pi}\operatorname{sen}\frac{-(n-m)\pi k}{k}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{k}{(n+m)\pi}\operatorname{sen}(n+m)\pi+\frac{k}{(n-m)\pi}\operatorname{sen}(n-m)\pi\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{k}{(n+m)\pi}\operatorname{sen}\right.$$
$$\left.-(n+m)\pi+\frac{k}{(n-m)\pi}\operatorname{sen}-(n-m)\pi\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{k}{(n+m)\pi}\operatorname{sen}(n+m)\pi+\frac{k}{(n-m)\pi}\operatorname{sen}(n-m)\pi-\frac{k}{(n+m)\pi}\operatorname{sen}-(n\right.$$
$$\left.+m)\pi-\frac{k}{(n-m)\pi}\operatorname{sen}-(n-m)\pi\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{k}{(n+m)\pi}\operatorname{sen}(n+m)\pi-\frac{k}{(n+m)\pi}\operatorname{sen}-(n+m)\pi+\frac{k}{(n-m)\pi}\operatorname{sen}(n\right.$$
$$\left.-m)\pi-\frac{k}{(n-m)\pi}\operatorname{sen}-(n-m)\pi\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{k}{(n+m)\pi}(\operatorname{sen}\pi(n+m)-\operatorname{sen}-\pi(n+m))+\frac{k}{(n-m)\pi}(\operatorname{sen}\pi(n-m)\right.$$
$$\left.-\operatorname{sen}-\pi(n-m))\right]=0$$

Para que veas la utilidad de incluso lo más básico, como pudiera ser el cálculo del periodo mínimo, se pondría n par de ejemplos de su aplicación.

Supón que deseas saber el periodo fundamental de la función $f(t)=\operatorname{sen}2t$.
Se sabe que el periodo de la función seno se encuentra en 2π, por lo que, aplicando la fórmula para encontrar el mínimo periodo,

$$p=\frac{\text{periodo natural de } f(t)}{n}\rightarrow n=\text{c de}\angle$$

El periodo natural es 2π, y el coeficiente del ángulo en $f(t)=\operatorname{sen}2t$ es 2, por lo que, sustituyendo

$$p = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Por lo tanto, $p = \pi$ en $f(t) = \text{sen}2t$.

Para hacer las cosas un poco más interesantes.

Trata de encontrar el periodo fundamental de

$$f(t) = \cos\frac{2\pi nt}{k}$$

Se tiene que

$$p = \frac{\text{periodo natural de } f(t)}{n} \rightarrow n = \text{c de} \angle$$

Sustituyendo en la fórmula los valores conocidos

$$p = \frac{2\pi}{\frac{2\pi n}{k}} = \frac{2\pi k}{2\pi n} = \frac{k}{n}$$

Entonces, $p = \frac{k}{n}$ en $f(t) = \cos\frac{2\pi nt}{k}$

Para comprobar que los conceptos te hayan quedado claros, **resuelve** los ejercicios 8.1 números 1, 2, 16, 27 y 28, del capítulo 8 de Carmona & Filio (2011, p. 434-436) y compara tus resultados con los de los autores (para los últimos dos ejercicios las respuestas se encuentran en la p. 438). Ya que lo hagas, habrás valorado el aprendizaje obtenido de los periodos de una función.

A continuación, se presenta una tabla de integrales que son utilizadas comúnmente al solucionar problemas relacionados:

f(t)	$\int f(t)\,dt$	
sen nt	$\int \text{sen } nt\,dt$	$-\frac{1}{n}\cos nt + c$
cos nt	$\int \cos nt\,dt$	$\frac{1}{n}\text{sen } nt + c$
t sen nt	$\int t \text{ sen } nt\,dt$	$-\frac{1}{n^2}\text{sen } nt - \frac{t}{n}\cos nt + c$
t cos nt	$\int t \cos nt\,dt$	$\frac{1}{n^2}\cos nt + \frac{t}{n}\text{sen } nt + c$
t^2sen nt	$\int t^2 \text{sen } nt\,dt$	$\frac{2t}{n^2}\text{sen } nt + (\frac{2}{n^3} - \frac{t^2}{n})\cos nt + c$
t^2cos nt	$\int t^2 \cos nt\,dt$	$\frac{2t}{n^2}\cos nt + (\frac{t^2}{n} - \frac{2}{n^3})\text{sen } nt + c$
sen nt cos nt	$\int \text{sen } nt \cos nt\,dt$	$\frac{1}{2n}\text{sen}^2 nt + c$
e^{at}sen bt	$\int e^{at}\text{sen } bt\,dt$	$\frac{e^{at}(a \text{ sen } bt - b\cos bt)}{a^2 + b^2} + c$
e^{at}cos bt	$\int e^{at}\cos bt\,dt$	$\frac{e^{at}(a \cos bt - b\text{sen } bt)}{a^2 + b^2} + c$
sen mt sen nt	$\int \text{sen } mt \text{ sen } nt\,dt$	$\frac{\text{sen }(m-n)t}{2(m-n)} - \frac{\text{sen }(m+n)t}{2(m+n)} + c$
sen mt cos nt	$\int \text{sen } mt \cos nt\,dt$	$-\frac{\cos(m-n)t}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)t}{2(m+n)} + c$
cos mt cos nt	$\int \cos mt \cos nt\,dt$	$\frac{\text{sen }(m-n)t}{2(m-n)} + \frac{\text{sen }(m+n)t}{2(m+n)} + c$

Esto plantea algunas de las bases para la serie de Fourier, pero aún existen elementos que no se han descifrado, por ejemplo, de donde surgen los coeficientes de la serie, por qué varía la forma de escribirla entre distintos autores, y por qué las fórmulas para los coeficientes son diferentes en alguno de ellos dependiendo del libro que se elija. Para responder a estas preguntas se debería ver las fórmulas de Euler y su aplicación, siendo éstas tratadas en el siguiente subtema.

3.2.3. Fórmulas de Euler

Como seguramente ya habrás notado, para esta parte de la Unidad 3 se ha estado desplazando de lo general a lo particular, de la definición de las series de Fourier a los fundamentos matemáticos que le dan soporte y permiten justificar su uso.

Recordarás que, al inicio, en el 3.2.1, se habló de los coeficientes de Fourier e incluso se utilizaron haciendo ejercicios para poder sustituirlos en la serie por los valores que la resolvieran, de acuerdo a cálculos efectuados sobre su modelo matemático, pero no se profundizó en cómo se obtuvieron ni el porqué de su forma.

Su origen puede centrarse en las fórmulas de Euler.

Retomando lo visto en el 3.2.1, Fourier decía que las funciones con periodo 2π podían representarse con series infinitas de la forma

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\operatorname{sen} nt)$$

y se dice que algunos autores generalizaban aún más la forma, representándola como

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{p}t+b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}t)$$

Observarás, ahora que conoces la teoría detrás del uso de los periodos, que la segunda forma es igual a la primera si las funciones tienen periodo π. Esto es, si $p=\pi$, entonces

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}t+b_n\,sen\frac{n\pi}{p}t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\pi}t+b_n\,sen\frac{n\pi}{\pi}t\right)$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n sen\,nt)$$

Al ver diferentes libros de cálculo que incluyan el tema de las series de Fourier, podrás notar que la fórmula, dependiendo de los autores, puede ser escrita ligeramente diferente, llegando a encontrarla de la siguiente manera

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n sen\,nt)$$

En esta forma a_0 ya no se encuentra dividida entre 2.

Entonces, ¿cuál de las dos formas es la correcta? Si ambas representan a $f(t)$, entonces deberían ser iguales entre ellas, y al desaparecer indiscriminadamente el divisor crean una incongruencia, ¿no es así?

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n sen\,nt)=f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n sen\,nt)$$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n sen\,nt)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n sen\,nt)$$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n sen\,nt)-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n sen\,nt)=a_0$$

$$\rightarrow\frac{a_0}{2}=a_0 \quad \text{ó} \quad a_0=2a_0.$$

La respuesta a la incógnita es que ambas son correctas.

Se debe recordar que, a final de cuentas, son modelos matemáticos los que se encuentran representados por el conjunto de caracteres que permiten formularlos, siendo más importante que estos el concepto detrás de ellos.

Algunos autores, como lo indican Zill, (2009), eligen por conveniencia escribir el primer coeficiente como $\frac{a_0}{2}$ en lugar de a_0 para que la fórmula de a_n vista en el 3.2.1 coincida para $n = 0$, ya que de no hacerlo así, podría causar confusión entre algunos al verlo como un coeficiente calculable de forma distinta a la del resto pero que comparte su notación. Como ahora estás al tanto de esto, se utilizará la siguiente forma, ya que deberá ser indistinto para ti hacer los cálculos con cualquiera de las dos siempre y cuando recuerdes cómo definiste la serie y al coeficiente con su subíndice.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt)$$

Si $f(t)$ es periódica, con $p = 2\pi$, se calcularán los valores de los coeficientes para todo n que sea entero positivo.

Se empieza calculando a_0. Para hacerlo, se debe integrar la función desde $-\pi$ hasta π, que es su periodo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dt + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nt\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nt\,dt$$

para $n = 1,2,3,4$ ...

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 dt + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nt\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nt\,dt = a_0\ t|_{-\pi}^{\pi} + \frac{a_n}{n}\operatorname{sen} nt|_{-\pi}^{\pi} + \frac{-b_n}{n}\cos nt|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= [a_0\pi - a_0(-\pi)] + [\cancel{\frac{a_n}{n}\operatorname{sen}\pi n} - \cancel{\frac{a_n}{n}\operatorname{sen} - \pi n}] + [\frac{-b_n}{n}\cos n\pi - \frac{-b_n}{n}\cos -\pi n]$$

$$= [a_0\pi + a_0\pi] + [\frac{a_n}{n}(\operatorname{sen}\pi n - \operatorname{sen} - \pi n)] + [\frac{-b_n}{n}(\cos n\pi - \cos -\pi n)]$$

$$= 2a_0\pi + [\cancel{\frac{a_n}{n}(0)}] + [\cancel{\frac{-b_n}{n}(0)}] = 2a_0\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 2a_0\pi$$

Como lo que deseas encontrar es el coeficiente a_0, se despeja

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

Si se compara con lo que se había dicho en el tema 3.2.1, para reforzar el entendimiento del porqué algunos autores por conveniencia escriben en la serie el coeficiente como $\frac{a_0}{2}$ o a_0

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)dt$$

Observa que el coeficiente que se acaba de obtener se parece, para $p = \pi$, pero faltaría completar multiplicando ambos lados por $\frac{1}{2}$ para que quedaran iguales ambas expresiones, tal que

$$\frac{1}{2}(a_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\right) \rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

Ahora sí, tanto la expresión mostrada en el lado derecho para el coeficiente que se acaba de calcular como la del 3.2.1 son iguales, pero observa que el lado izquierdo es diferente. Dependiendo de la forma que se utiliza para expresar la serie de Fourier será la forma de expresar el primer coeficiente, a_0.

Si se expresa como

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}t + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}t\right)$$

entonces

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)dt$$

En cambio, si se expresa como

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt)$$

entonces

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

La diferencia entre ambas es que en una el coeficiente a_0 ya incluye a la división entre 2 en su definición.

Con esto se espera que ya sea claro el por qué podrás encontrar escrita de manera diferente la serie de Fourier, dependiendo de cómo definas al coeficiente a_0.
Continúa ahora calculado el coeficiente a_n.

Para hacerlo, se debe multiplicar por $\cos nt$ ambos lados de la función e integrarlos en el periodo, esto es, de $-\pi$ a π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\, f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos nt\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nt \cos nt\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nt \cos nt\, dt$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos nt\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 nt\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nt \cos nt\, dt$$

para $n = 1,2,3,4$ ...

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos nt\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 nt\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nt \cos nt\, dt$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos nt\, dt + \frac{1}{2} a_n \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nt)dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nt \cos nt\, dt$$
$$= \frac{a_0}{n} \operatorname{sen} nt|_{-\pi}^{\pi} + \frac{a_n}{2}[t + \frac{1}{2n} \operatorname{sen} 2nt]|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nt \cos nt\, dt$$
$$= 0 + \frac{a_n}{2}[t + \frac{1}{2n} \operatorname{sen} 2nt]|_{-\pi}^{\pi} + 0 = a_n [\frac{t}{2} + \frac{1}{2n} \operatorname{sen} 2nt]|_{-\pi}^{\pi} = a_n \pi$$

Recuerda que se había multiplicado al principio ambos lados de la ecuación por $\cos nt$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt = a_n \pi$$

Como lo que se desea es encontrar es el coeficiente a_n, se despeja

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt$$

Si se quiere generalizar para un periodo p

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos\frac{n\pi}{p}t\,dt$$

que es la fórmula que se había presentado en el 3.2.1.

Por último, para obtener el coeficiente b_n se seguirá un procedimiento parecido al llevado a cabo para obtener a_n.

Se debe multiplicar por $\operatorname{sen} nt$ ambos lados de la función e integrarlos en el periodo, esto es, de $-\pi$ a π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nt\, f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \operatorname{sen} nt\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \operatorname{sen} nt \cos nt\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nt \operatorname{sen} nt\,dt$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \operatorname{sen} nt\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \operatorname{sen} nt \cos nt\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen}^2 nt\,dt$$

para $n = 1,2,3,4 \ldots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \operatorname{sen} nt\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \operatorname{sen} nt \cos nt\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen}^2 nt\,dt$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \operatorname{sen} nt\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nt \cos nt\,dt + \frac{1}{2} b_n \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nt)\,dt$$
$$= -\frac{a_0}{n}\cos nt\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nt \cos nt\,dt + \frac{b_n}{2}\left[t + \frac{1}{2n}\operatorname{sen} 2nt\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= 0 + 0 + \frac{b_n}{2}\left[t + \frac{1}{2n}\operatorname{sen} 2nt\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{b_n}{2}\left[t + \frac{1}{2n}\operatorname{sen} 2nt\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} = b_n \pi$$

Recuerda que se había multiplicado al principio ambos lados de la ecuación por $\cos nt$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nt\, f(t)dt = b_n \pi$$

Como lo que se desea encontrar es el coeficiente a_n, se despeja

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}\, nt f(t)dt$$

Si se quiere generalizar para un periodo p

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\operatorname{sen}\ \frac{n\pi}{p}t\, dt$$

que es la fórmula que se había presentado en el 3.2.1.

Ahora ya sabes de donde salen los coeficientes de la serie de Fourier, también conocidos como coeficientes de Fourier.

Revisa los ejemplos 1 al 4 del capítulo 8 de Carmona & Filio (2011, p. 442-449). Ya que lo hagas, habrás entendido la forma de aplicar los conocimientos adquiridos para encontrar la serie de Fourier de funciones.

3.2.4. Convergencia de series

Al utilizar la serie de Fourier para modelar alguna función periódica $f(t)$ se desea tener las condiciones necesarias para tener la certeza de que converja cuando menos en los valores de t en los que la función tiene continuidad.

Recuerda, una función se dice que es continua por tramos en $[a, b]$ mientras existan segmentos finitos del intervalo con extremos $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ en los que la función tenga continuidad para cada segmento y en cada extremo el límite desde el interior del sub intervalo exista y sea finito (Edwards & Penney, 2009).

Zill (2009) especifican en un teorema las condiciones suficientes de convergencia puntual para una serie de Fourier, en el que dicen que si f y f' presentan continuidad en un intervalo $(-p, p)$ por tramos, o lo que es lo mismo, son discontinuas en una cantidad finita de puntos en el intervalo, entonces la serie de la función converge a $f(t)$ en un punto de continuidad, y en un punto de discontinuidad converge hacia el promedio de

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

en el que $f(t^+)$ representa el límite de f en t por la derecha y $f(t^-)$ el límite por la izquierda.

Nagle, Saff y Snider (2005) los definen con la siguiente notación,

$$f(t^+) = \lim_{h\to 0^+} f(t+h) \text{ , y } f(t^-) = \lim_{h\to 0^-} f(t-h)$$

Carmona & Filio (2011) agregan a las definiciones anteriores la característica ya muy particular de que sea f periódica con $p = 2\pi$, y que $f(t)$ y $f'(t)$ son continuas por tramos en $(-\pi, \pi)$ convergiendo la serie a $f(t)$ para el caso en que t sea un punto de continuidad, o si es punto de discontinuidad a

$$\frac{1}{2}(\lim_{t\to t_0^+} f(t) + \lim_{t\to t_0^-} f(t))$$

Las tres diferentes formas de decirlo significan lo mismo, y establecen las condiciones de convergencia en un punto.
Para comprobarlo se basará en la última forma, y se va a suponer para ello que la función tiene continuidad en su primera y segunda derivadas.

Si se toma la definición del coeficiente de Fourier a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt$$

Resuelve la integral

$$a_n = \frac{f(t)\operatorname{sen} nt}{n\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\operatorname{sen} nt\, dt = 0 - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\operatorname{sen} nt\, dt$$

Haciendo de nuevo la integración

$$a_n = \frac{f'(t)\cos nt}{n^2\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\cos nt\, dt = 0 - \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\cos nt\, dt$$

Observa que la segunda vez que se resolvió la integral, debido al periodo de $f'(t)$ el primer término se anula, como ocurrió durante la primera ocasión.

Al tener continuidad $f''(t)$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ entonces $|f''(t)| < M$, siendo M constante apropiada.

También se tiene que $|\cos nt| \leq 1$, por lo que

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\cos nt\, dt\right| < \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt = \frac{2M}{n^2}$$

Resolviendo para el coeficiente b_n se tendría que

$$|b_n| < \frac{2M}{n^2}$$

Esto lleva a que cada elemento, en su valor absoluto, de la serie de Fourier de $f(x)$ es, cuando mucho, igual al de la serie convergente

$$|a_0| + 2M\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) + 2M\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) = |a_0| + 4M\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

por lo que se podría decir, entonces que la serie de Fourier también es convergente.

Para que puedas entender por medio de un ejercicio práctico el concepto, un ejemplo sencillo de convergencia que Nagle, Saff & Snider (2005, p.600) presentan es el que se encuentra a continuación:

Si se deseará saber a qué función tiene convergencia la serie de Fourier de $f(t)$ definida como

$$f(t) = \{-1, \quad -\pi < t < 0, 1, \quad 0 < t < \pi$$

lo resolverías de la siguiente forma.

Por el teorema de convergencia, se sabe que la serie de Fourier converge a una función $g(t)$ con $p = 2\pi$.

Se sabe también, por la descripción del problema, que esa función $g(t)$ a la que converge se encuentra descrita por

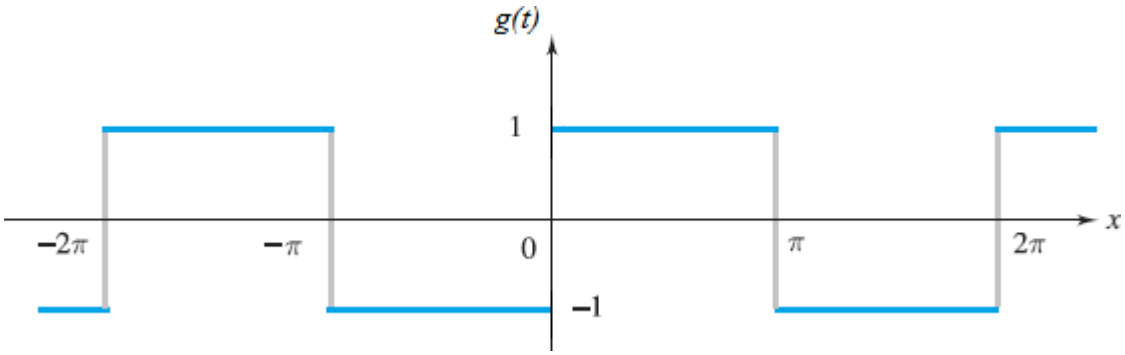
$$g(t) = f(t) = -1 \quad \text{en} \quad -\pi < t < 0,$$

$$g(t) = f(t) = 1 \quad \text{en} \quad 0 < t < \pi,$$

$$g(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 0,$$

$$g(\pm\pi) = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

Una forma de graficar $g(t)$ sería



De esta manera conoces ahora la función a la que se converge y su forma.

Es importante que sepas que las series de Fourier pueden derivarse e integrarse. Observa ahora lo que dicen los teoremas respectivos (Nagle, Saff & Snider, 2005).

Para derivar una serie de Fourier se supondrá que tanto $f'(t)$ como $f''(t)$ tienen continuidad en tramos para $[-p, p]$. La serie de $f'(t)$ puede ser calculada haciendo uso de la serie de $f(t)$ derivando término por término. Esto es, si se tiene

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}t + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}t\right)$$

entonces

$$f'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{p}\left(-a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}t + b_n \cos\frac{n\pi}{p}t\right)$$

Esto aplica para $f(t)$ periódica y continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$ con $p = 2\pi$

Para integrar una serie de Fourier se supondrá que $f(t)$ tiene continuidad por tramos para $[-p, p]$ y que su serie es

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{p}t + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}t)$$

entonces

$$\int_{-p}^{x} f(t)dt = \int_{-p}^{x} \frac{a_0}{2}dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-p}^{x} (a_n \cos\frac{n\pi}{p}t + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}t)dt$$

funcionando para cualquier t en $[-p, p]$.

Haciendo uso de lo que se sabe ya de los coeficientes de Fourier, de la periodicidad, y habiendo entendido la convergencia de las series, se observaran las series de senos y cosenos de Fourier (Nagle, Saff & Snider, 2005).

Si $f(t)$ tiene continuidad por tramos en $[0, p]$, la serie de cosenos de Fourier para $f(t)$ en el intervalo $[0, p]$ resulta ser

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{p}t$$

con el coeficiente a_n modelado como

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\frac{n\pi}{p}t\,dt$$

para $n = 0,1,2,3$ ...

Si $f(t)$ tiene continuidad por tramos en $[0, p]$, la serie de senos de Fourier para $f(t)$ en el intervalo $[0, p]$ resulta ser

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}t$$

con el coeficiente b_n modelado como

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}t\,dt$$

para $n = 1,2,3$ ...

Lee el tema 10.4 del libro de Nagle, Saff & Snider (2005), *series de senos y cosenos de Fourier*, Cuando termines, habrás reforzado tus conocimientos del tema y serás capaz de entender sus bases.

Como puedes observar, la forma en que se presentan las series de senos y cosenos de Fourier es sencilla, gracias a los conocimientos adquiridos hasta el momento, pero falta de revisar una última característica que te permitirá además aplicarla en el siguiente tema. Esta característica es la de la paridad de las funciones y sus respectivas series.

- Se dice que una función $f(t)$ **es par** en $[a, b]$ sí y sólo sí se cumple que $f(-t) = f(t)$ para toda t dentro del intervalo.
- Caso contrario, se dice que una función $f(t)$ **es impar** en $[a, b]$ sí y sólo sí se cumple que $f(-t) = -f(t)$ para toda t dentro del intervalo.

Observa un par de ejemplos.

a Supón que se tiene una función $f(t)$ tal que $f(t) = \operatorname{sen} t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \rightarrow f(-t) = \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t = -f(t)$, por tanto, se puede decir que la función $\operatorname{sen} t$ es impar.

b Supón ahora que se tiene una función $f(t)$ tal que $f(t) = \cos t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \rightarrow f(-t) = \cos(-t) = \cos t = f(t)$, por tanto, se puede decir que la función $\cos t$ es par.

c Si se quisiera saber si $f(t)$ es par o impar para $f(t) = t^5 - t$, sólo se tendría que desarrollar de acuerdo a los criterios definidos.

$$f(t) = t^5 - t$$

$$f(-t) = (-t)^5 - (-t) = -t^5 + t = -(t^5 - t) = -f(t)$$

Las funciones no tienen por qué caer forzosamente en alguna de las dos categorías. Si alguna función no cumple con ninguno de los criterios para poder ser clasificada como par o impar, se puede decir que la función no es par ni impar. Este es el caso de la función $f(t) = t^4 + t$, que con lo que has visto en los ejemplos podrás comprobar por ti mismo. El que una función sea par significa que es simétrica con respecto al eje de $f(t)$, y que sea impar significa que la simetría estará con respecto al origen.

Carmona & Filio (2011) presentan un conjunto de 7 teoremas al respecto de las funciones pares e impares.

1 Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones pares, entonces el resultado de $f(t) + g(t)$ será una función par.

2 Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones impares, entonces el resultado de $f(t) + g(t)$ será una función impar.

3 Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones pares, entonces el resultado de $f(t)g(t)$ será una función par.

4 Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones impares, entonces el resultado de $f(t)g(t)$ será una función par.

5 Si $f(t)$ es par y $g(t)$ es impar, entonces el resultado de $f(t)g(t)$ será una función impar.

6 La transformada de Fourier de una función periódica par $f(t)$ con $p = 2\pi$ se representa en serie de Fourier de cosenos, esto es

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

y sus coeficientes serán

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\, dt, \qquad \text{para } n = 1,2,3,4 \ldots,$$

$$b_n = 0.$$

7 La transformada de Fourier de una función periódica impar $f(t)$ con $p = 2\pi$ se representa en serie de Fourier de senos, esto es

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt$$

y sus coeficientes serán

$$a_0 = 0,$$

$$a_n = 0,$$

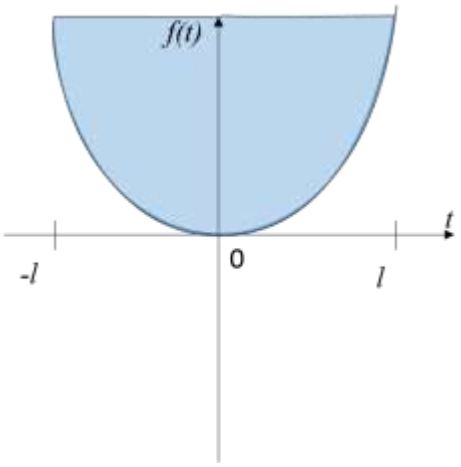
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\,dt, \quad \text{para } n = 1,2,3,4 \ldots.$$

Una de las propiedades de las funciones simétricas es que, si una función $f(t)$ continua por partes en el intervalo $[-l, l]$ es par,

$$\int_{-l}^{l} f(t)dt = 2\int_{0}^{l} f(t)dt$$

Recuerda que la integral es el área bajo la curva, por lo que gráficamente es entendible esta característica, ejemplificando con el siguiente diagrama.

Este representa la función $f(t) = t^2$ en el intervalo indicado.

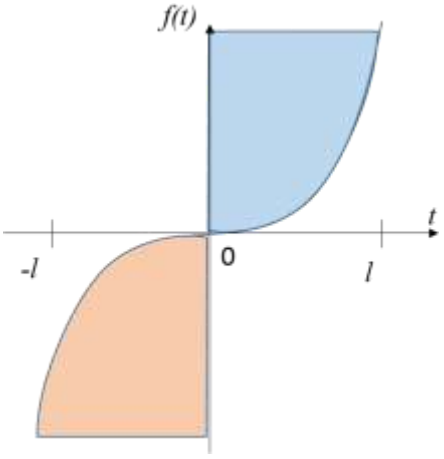


Ahora, si la función $f(t)$ continua por partes en el intervalo $[-l, l]$ es impar,

$$\int_{-l}^{l} f(t)dt = 0$$

Gráficamente puede ejemplificarse con el siguiente diagrama.

Este representa la función $f(t) = t^3$ en el intervalo indicado.



Lee los ejemplos 1 al 6 del capítulo 8 de Carmona & Filio (2011) y, una vez hecho esto, realiza los ejercicios 8.2 del número 1 al 8 (p. 451-457). Cuando termines, habrás clarificado la forma de aplicar los conocimientos adquiridos para encontrar la serie de

Fourier de funciones descritas, ya sea por medio de diagramas o por modelos matemáticos por tramos.

Has aprendido a calcular las series de Fourier para funciones periódicas, incluyendo aquellas continuas por tramos, pero pueden ser desarrolladas funciones no periódicas en series de Fourier. En el siguiente subtema se revisará cómo hacerlo.

3.2.5. Funciones no periódicas en series

Para poder desarrollar en series a funciones no periódicas, se hará uso especialmente de lo aprendido en el último tema.

Una función no periódica puede ser tomada como periódica para un tramo en el que presenta continuidad. Para saber cómo conseguirlo aplicando los conocimientos de la unidad en su tema 3.2 hasta el momento, se hará uso de un par de ejemplos basados en los de Carmona & Filio (2011).

Supón que se tiene una función $f(t) = t^3$. Esta función podría ser desarrollada como una serie de Fourier de cosenos o de senos, significando esto que $f(t)$ se consideraría como par o impar, para el primer y segundo casos respectivamente.

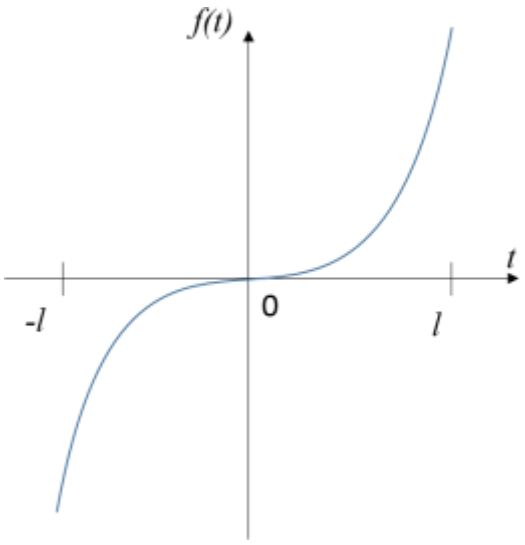
A continuación, se define la función de las dos formas para que puedas ver cómo se comportaría.

Se define primero de forma completa acotándola en $[-l, l]$ $f(t) = t^3, \ -l < t < l$

en donde
$f(-t) = -f(t)$

esto es, $f(t)$ es impar.

Su gráfica sería



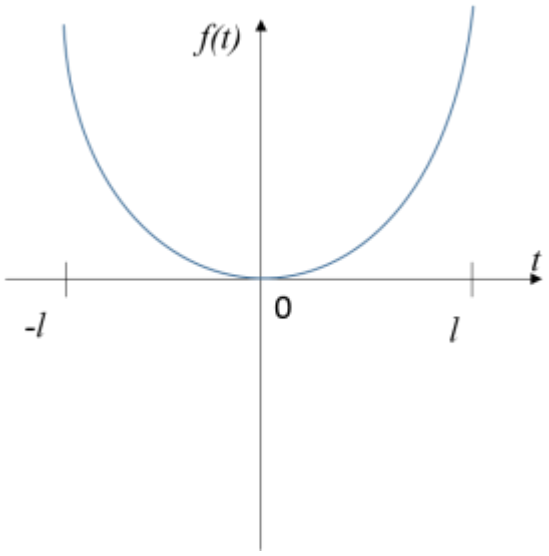
Ahora, si se toma como periódica solamente para un tramo, en éste caso el derecho, representándola como función par se tendría

$f(t) = t^2, \qquad -l < t < l$

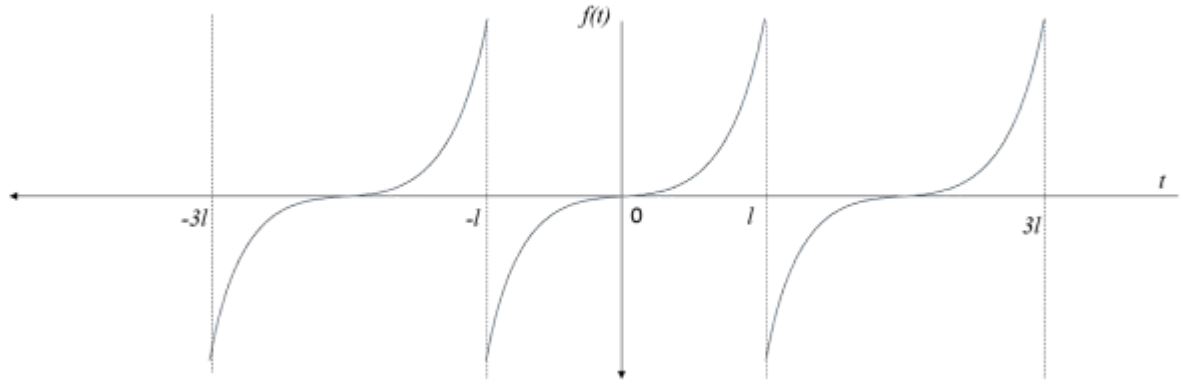
en donde
$f(-t) = f(t)$

esto es, $f(t)$ es par.

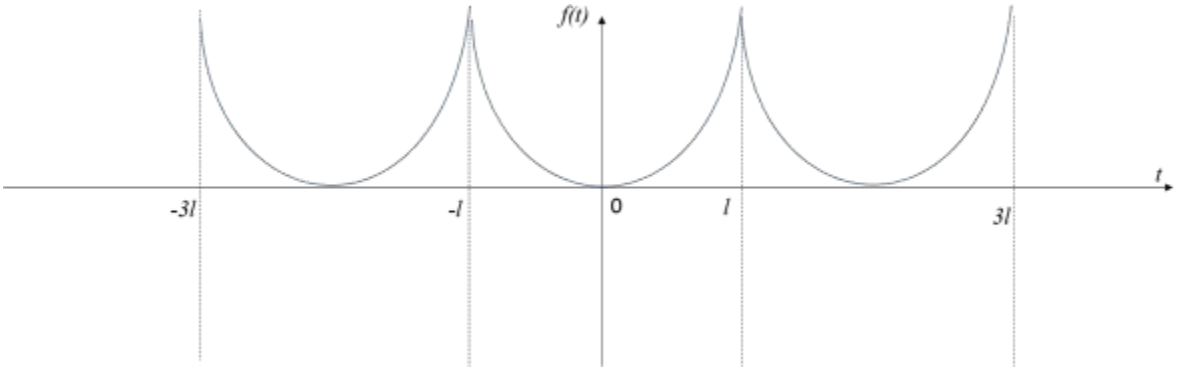
Su gráfica sería



Expandiendo la función impar se tiene una gráfica como la que sigue



Si en cambio se expande la función par, quedará una gráfica así



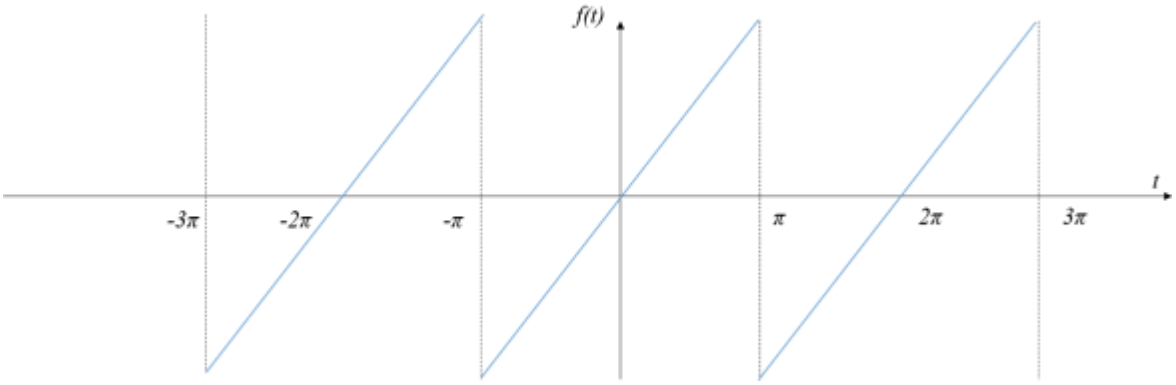
En cualquiera de los dos casos, se puede ya realizar un desarrollo en series de Fourier de senos o cosenos, dependiendo de si se elige la primera o la segunda gráfica.

Un segundo ejemplo puesto por los autores es el de desarrollar en serie de senos y de cosenos la función $f(t) = t, 0 < t < \pi$

Para hacerlo, si se expande la función de forma impar (cosenos) se tendría que

$f(t) = t, \quad -\pi < t < \pi$

lo que puede graficarse como



Recuerda que en el tema anterior la transformada de Fourier de una función periódica impar $f(t)$ con $p = 2\pi$ representada en serie de Fourier de senos es

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt$$

con coeficientes

$a_0 = 0,$

$a_n = 0,$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\, dt, \quad \text{para } n = 1,2,3,4 \ldots.$$

esto es,

$$b_n = -\frac{2}{\pi}\cos n\pi = \begin{cases} \frac{2}{n}, & n = 1,3,5,7, \ldots \\ -\frac{2}{n}, & n = 2,4,6,8, \ldots \end{cases}$$

por lo que sustituyendo los coeficientes se tiene que la serie desarrollada en senos para la función dada es

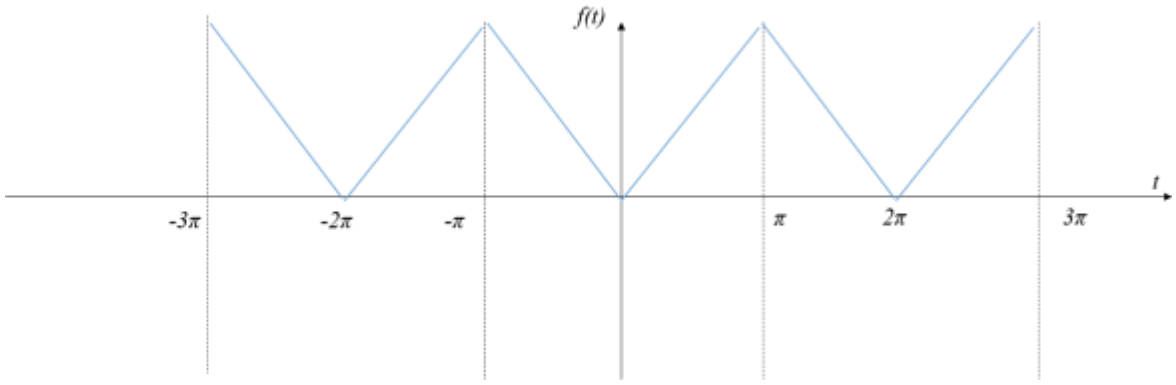
$$f(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nt$$

Para desarrollarla en cosenos el procedimiento es idéntico, solamente haciendo uso de la definición de la serie par.

Se tiene, de esta manera, que

$$f(t) = |t|, \qquad -\pi < t < \pi$$

la cual puede graficarse como



Tomando también del tema anterior la definición de la transformada de Fourier de una función periódica par $f(t)$ con $p = 2\pi$ que se representa en serie de Fourier de cosenos, se tiene que

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

y sus coeficientes serán

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad \text{para } n = 1,2,3,4 \ldots,$$

$$b_n = 0.$$

esto es,

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi}\cos(n\pi - 1) = \{-\frac{4}{n^2\pi}, \quad n = 1,3,5,7, \ldots \; 0, \quad n = 2,4,6,8, \ldots$$

Sustituyendo los coeficientes se tiene que la serie desarrollada en cosenos para la función dada es

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)}{(2n+1)^2}t$$

Con estos ejemplos has visto como una función no periódica puede ser tomada como periódica para un tramo en el que presenta continuidad, facilitando su desarrollo en series.

Realiza ahora los ejercicios 8.6 del número 1 al 15 del libro de Carmona & Filio (2011, p. 485-486), comparando tus resultados con los de los autores. Una vez que lo hayas hecho habrás practicado y comprobado tu aprendizaje respecto de cómo desarrollar funciones en series senoidales y cosenoidales.

3.2.6. Aplicaciones de las series de Fourier en fenómenos físicos

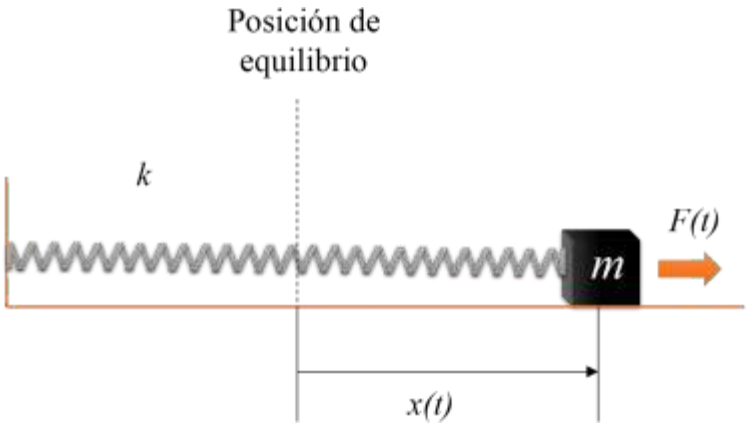
Las series de Fourier hacen uso de desarrollos en series trigonométricas, y esto permite que puedan ser utilizadas para expresar funciones presentes en distintos fenómenos físicos.

Fenómenos que requieren dentro de su análisis expresar funciones en forma de series trigonométricas son los que presentan flujo de calor, cuerdas que vibran, movimientos de masas, fuerzas periódicas, resonancias y oscilaciones amortiguadas, entre muchos otros.

Edwards & Penney (2009) muestran ejemplos en donde se aplican las series de Fourier de los cuales se presentarán algunos de forma general, agregando al final un par de lecturas que deberás hacer para observar cómo se hace uso de estas abstracciones una vez que se introducen valores.

Supón la existencia de un sistema, con una masa m situada en el extremo de un resorte con constante de Hooke k que se encuentra con la influencia de $F(t)$, siendo ésta una fuerza externa periódica, en donde el movimiento de la masa es del tipo no amortiguado.

El sistema puede representarse gráficamente de la siguiente forma



La distancia x que se mueve desde el punto en donde se encuentra en equilibrio cumple con la ecuación que seguramente viste en tus cursos de física,

$$F(t) = mx'' + kx$$

cuya solución general tiene una forma como

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + x_p(t)$$

La frecuencia natural, como puede observarse, es ω_0, el cual es igual a $\sqrt{\frac{k}{m}}$ y los coeficientes pueden ser determinados por los valores iniciales, siendo x_p una solución particular.

Se puede hacer uso de la serie de Fourier para hallar una solución particular periódica de $F(t) = mx'' + kx$. A ésta solución se le conoce como *periódica estacionaria*, y será representada por $x_{sp}(t)$.

Se considera que la fuerza externa es función impar con $p = 2L$, por lo que podrá ser representada como una serie de senos de Fourier.

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} t\right)$$

Si la frecuencia de la función seno no es igual a la natural, o lo que es lo mismo $\frac{n\pi}{L} \neq \omega_0$ para $n = 1,2,3$ ..., se puede encontrar una solución periódica del tipo

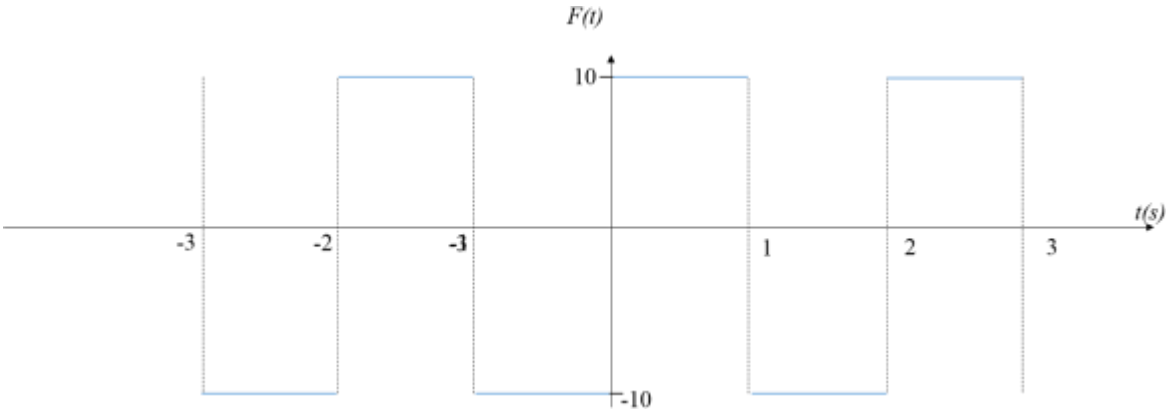
$$x_{sp}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} t\right)$$

Por medio de la sustitución de las series de las ecuaciones presentadas para poder calcular b_n.

Para darle un toque práctico, se piensa que la constante de Hooke es 32 N/m, la masa es de 2kg y la fuerza externa se encuentra definida como periódica de tipo impar con $p = 2$ s de la forma

$$F(t) = \{+10\text{N}, 0 < t < 1 \ -10\text{N}, 1 < t < 0$$

Un diagrama que representa el comportamiento de la función de la fuerza externa pudiera ser éste



La serie de Fourier de la función anterior es

$$F(t) = \frac{40}{\pi} \sum_{n\ \text{impar}}^{\infty} \frac{\text{sen}n\pi t}{n}$$

Para llevar a cabo el cálculo de la solución periódica estacionaria $x_{sp}(t)$ se tiene que

$$x_{sp}(t) = \sum_{n\ \text{impar}}^{\infty} b_n \text{sen}\ n\pi t$$

Lo único que se tendría que hacer es calcular b_n para sustituirlo en la función anterior $x_{sp}(t)$, que es la que se pretende encontrar.

Al final, si se desarrollan las operaciones de forma adecuada, deberá quedar que

$$b_n = \frac{20}{n\pi(16 - n^2\pi^2)}, \qquad n = 1,3,5,7\ \ldots$$

por lo que

$$x_{sp}(t) = \frac{20}{\pi} \sum_{n\ \text{impar}}^{\infty} \frac{\text{sen}\ n\pi t}{n(16 - n^2\pi^2)}$$

Otro ejemplo de las aplicaciones que tiene la serie de Fourier es en la resonancia.

Se dice que si hay un término $B_n \operatorname{sen}(N\pi t/L) \neq 0$ en la solución de la serie de $F(t)$ en $F(t) = mx'' + kx$

en donde $N\pi t/L$ es igual a la frecuencia natural ω_0, este término genera *resonancia pura*.

Analizando lo dicho para llegar a una expresión que lo resuma, si $\omega_0 = N\pi t/L$, entonces $B_n \operatorname{sen}(\frac{N\pi}{L}t) = B_n \operatorname{sen}\omega_0 t$, por lo tanto

$$F(t) = mx'' + kx = B_n \operatorname{sen}\frac{N\pi}{L}t = B_n \operatorname{sen}\omega_0 t$$

El motivo de que se genere la resonancia pura radica en que la ecuación anterior,

$$mx'' + kx = B_n \operatorname{sen}\omega_0 t$$

tiene como solución de resonancia, cuando $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a

$$x(t) = -\frac{B_N}{2m\omega_0} t\cos\omega_0 t$$

Recordando, para llevar a cabo el cálculo de la solución periódica se tiene que

$$x_{sp}(t) = \sum_{n\ \text{impar}}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\ n\pi t$$

Para este ejemplo, la solución de la ecuación anterior será

$$x(t) = -\frac{B_N}{2m\omega_0} t\cos\omega_0 t + \sum_{n\neq N}^{\infty} \frac{B_N}{m(\omega_0^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2})} \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}$$

Para ver tres ejercicios resueltos de la aplicación de las transformadas en fenómenos físicos, **lee** los ejemplos 2, 3 y 4 de Edwards & Penney, revisando un último caso que es el de las oscilaciones amortiguadas forzadas (2009, p. 612-614). Al hacerlo, habrás

reforzado tu conocimiento respecto del tipo de problemas existentes en fenómenos físicos que pueden utilizar la serie de Fourier para facilitar su análisis y cálculo.

Para ver la forma en que se desarrollan y solucionan fenómenos modelados para el flujo de calor y cuerdas vibrantes **lee** el tema 10.1 de Nagle, Saff y Snider (2005, p. 576-587). Después de hacerlo, podrás entender cómo se unen los temas vistos a lo largo de toda la materia para poder solucionar un problema, haciendo uso del modelado en ecuaciones diferenciales, separación de variables y aplicación de series trigonométricas para expresar funciones.

Las transformadas de Laplace y series de Fourier, como has visto a lo largo de la unidad, tienen aplicación en las energías renovables al facilitar resolver modelos de fenómenos representables matemáticamente.

En las energías renovables, para el desarrollo, análisis, operación y control de sistemas que hagan uso de éstas, encuentran un vasto campo de aplicación, ya que se encuentran presentes en la termodinámica, mecánica, electricidad, química, biología y finanzas, por mencionar tan sólo algunos de los campos en donde podrán expresarse modelos de utilidad para el estudiante y resolverlos.

Cierre de la Unidad

A lo largo de la unidad se abordaron los conceptos de la transformada de Laplace y las series de Fourier definiendo ambas, aprendiendo a calcular la transformada inversa; fueron cubiertas las propiedades de linealidad, traslación, derivación e integración de la transformada junto con otras no menos importantes, identificando las condiciones suficientes de existencia para la aplicación de las transformadas, y aprendiendo a calcularla para funciones básicas y definidas por tramos. Fueron mostrados los fundamentos que permiten hacer uso de las series de Fourier, detallando las fórmulas de Euler, la forma de las series trigonométricas y funciones con periodicidad, y el tratamiento de aquellas funciones no periódicas por medio de series. Se estudiaron casos particulares y observaron ejemplos típicos, aplicando la transformada de Laplace y series de Fourier para resolver primero ejercicios abstractos y posteriormente problemas asociados con fenómenos físicos presentes en las energías renovables, sugiriendo materiales de estudio para ver las aplicaciones de estas herramientas y sus técnicas de uso en un sistema de energías renovables.

Se espera que el curso haya sido de tu agrado, y que ahora que tienes las competencias necesarias, puedas hacer uso de éstas para aplicarlas en tu vida como profesional de las energías renovables.

Fuentes de consulta

1. Blanchard, P., Devaney, R. L. y Hall, G. R. (1999). *Ecuaciones diferenciales*. México: International Thomson Editores, S.A. de C.V.
2. Bronson, R. (2003). Schaum's Easy Outline of Differential Equations. Estados Unidos: McGraw Hill Professional
3. Carmona Jover, I. & Filio López, E. (2011). *Ecuaciones diferenciales*. 5ª Ed. México: Pearson Educación de México S.A. de C.V.
4. Edwards, C. H., Penney, D. E. (2009). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. 4a ed. México: Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
5. Nagle, K., Saff, E. B., Snider, A. D. (2005) *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. 4a ed. México: Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
6. Zill, D. G. (1997). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. 6a ed. México: International Thomson Editores.
7. Zill, D. G., Cullen, M. R. (2009) *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera*. 7a ed. México, D.F.: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.